УДК 51 (075.8)

Н.В. БРОВКА

ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЦИИ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ

Математический анализ обладает особенностями, которые детерминированы качественным характером изучаемых математических объектов. К приемам обучения, которые разработаны на основе интеграции теории и практики, относятся приемы алгоритмизации, смысловых опор, бинарных оппозиций. Эти приемы, как составляющие методов обучения, способствуют формированию обобщенных учебных умений и продуктивности знаний студентов при изучении ими математики и математического анализа в частности.

Введение

В условиях реорганизации и перестройки процесса обучения, активного распространения информационных и компьютерных технологий от современного преподавателя математики требуются интегративные творческие умения, основанные на применении комплексных знаний, способности анализировать, отбирать, объединять и суммировать разнообразные компоненты научного знания. Подготовка таких специалистов требует соответствующей перестройки университетского математического образования. Одним из перспективных ее направлений является интеграция теории и практики обучения студентов математике. Интеграция теории и практики может стать действенным средством повышения качества математической подготовки студентов, если теорию и практику обучения представлять как некие логические взаимосвязанные формы, которые существуют одна в другой, одна подле другой, но никак не одна после другой.

В нашем исследовании мы опираемся на следующее определение: **интеграция теории и практики обучения – это целенаправленное, систематическое объединение в целое, согласование, соотнесение и упорядочение теоретических положений и способов практической деятельности в обучении студентов математике** [1].

Основная часть

Деятельность преподавателя в методической системе интеграции теории и практики предполагает наличие обратной связи и строится на гибком применении методов преподавания, а также методов обучения. Способы классификации методов обучения с точки зрения методологии даны Н.К. Степаненковым [2]. Такую классификацию осуществляют по источникам знаний, по дидактическим целям, по уровню познавательной активности обучаемых. Так как речь идет об основных положениях разработки методической системы интеграции теории и практики обучения студентов математике, остановимся на делении методов по дидактическим целям. Применительно к процессу обучения математике это деление описано А.А. Столяром [3]. Варьирование методов осуществляется путем применения и сочетания отобранных нами приемов обучения. Как известно, приемы представляют собой отдельные элементы, из которых складываются методы обучения [2]. Перечислим некоторые **методические приемы**, которые используются в разработанной методической системе для обеспечения реализации интеграции теории и практики обучения студентов математическому анализу с целью повышения качества их математической подготовки.

Выбор математического анализа из всего перечня математических дисциплин курса высшей школы обусловлен следующими причинами:

1) наибольшим количеством часов учебного времени, отведенного в программе для изучения этого курса;

2) такими характерными чертами этой дисциплины, как фундаментальность, диалектичность, качественный характер исследования математических объектов;

3) язык и методология математического анализа позволяют придать процессу обучения конкретному знанию мировоззренческий характер;

4) существенными преемственными связями математического анализа с другими дисциплинами курса вузовской математики, а также со школьным курсом алгебры и начал анализа.

При ознакомлении и осмыслении студентами новой учебной информации используются приемы, предусматривающие включение в содержание обучения:

- мотивации введения тех или иных изучаемых понятий путем рассмотрения их использования в математических дисциплинах, прикладных задачах и практике;
- элементов проблемности и историзма, впечатляющих парадоксальных математических фактов;
- презентации основных идей и теоретических положений, которые предваряют изложение лекционного материала;
- приема бинарных оппозиций при изучении понятий и свойств математических объектов, сравнения, аналогии и противопоставления;
- приема смысловых опор при делении учебного материала на части или фрагменты;
- приема алгоритмизации учебного материала.

Указанные приемы позволяют обеспечить следование принципам преемственности, систематичности, а также требованию сочетания научной строгости и доступности изложения материала. Уточним, в чем состоят некоторые из упомянутых приемов.

Мотивация введения изучаемых математических понятий путем установления их внутридисциплинарных, междисциплинарных и трансдисциплинарных связей, а также рассмотрения их прикладных аспектов согласуется с концепцией бинарности. Согласно ей каждый учебный предмет в высшей школе имеет двустороннюю значимость – внутрисодержательную и прикладную [4]. Взгляд на взаимосвязь теории и практики в математике в настоящее время претерпевает сильные изменения, обусловленные тем, что такая взаимосвязь все более перестает быть непосредственной. Математические исследования и их результаты отделены от решаемых практических задач несколькими ступенями абстрагирования. Это необходимо учитывать в процессе преподавания. Обучаемые должны получить ясное представление о том, что математические теории не рождаются произвольно, а естественным образом вызревают из того практического опыта и теоретических знаний, которые уже накоплены. Теории могут объединять общей идеей множество известных фактов, освещать с единой позиции целый круг каких-либо проблем, находить объяснение наблюдаемым явлениям в самых различных сферах человеческой жизнедеятельности. Отличие математики от других наук состоит, возможно, лишь в том, что в математике с ее исходными абстрактными понятиями и “абстракциями над абстракциями” бывает сложно уловить исходные процессы или явления, которые явились источником для теоретических построений.

К историческим фактам, например, при изучении предела последовательности можно отнести известные апории Зенона об Ахиллесе и черепахе, при построении множества действительных чисел – историю развития взглядов на отрицательные числа, при изучении определенных интегралов – о методе исчерпываний Евдокса, принципе Кавальери, а также о втором законе Кеплера, нарушение которого в поведении Урана явилось толчком для математического обоснования открытия планеты Нептун. Большой интерес вызывают факты, что площадь или объем не всякого множества можно измерить, что для бесконечного множества его часть может содержать столько же элементов, сколько все множество, что в отрезке длины единица и в квадрате площади единичной площади содержится одинаковое "количество" точек и др.

Неформальному изложению способствует упоминание о том, что чисто "теоретическое" исследование независимости пятого постулата Евклида (о параллельных прямых) от остальных аксиом геометрии благодаря исследованиям Н.И. Лобачевского, Я. Байяи и К.Ф. Гаусса, а позднее Б. Римана, Д. Гильберта сделало возможным открытие принципов относительности. И наоборот, появление электронных вычислительных машин, решающих чисто практические задачи, послужило началом развития фундаментальных теоретических исследований, изучающих математические объекты дискретной природы.

Прием бинарных оппозиций состоит в рассмотрении пар математических объектов, владеющих противоположными свойствами, способствует формированию умения строить отрицания изучаемых понятий и утверждений.

Построение отрицаний основано на правиле логики предикатов, которое заключается в том, что при построении отрицаний символ общности – $\forall$ (любой, всякий, для любого) заменяется символом существования – $\exists$ (существует, найдется хотя бы один), и наоборот. Кроме того, соответственно изменяются на противоположные или обратные и другие математические отношения и связки (знаки следования, неравенство и т.д.). Как свидетельствует практика обучения студентов, наибольшие трудности возникают при построении символьных формулировок бинарных понятий "ограниченный – неограниченный", "монотонный – немонотонный", "непрерывный – разрывный" и др. При этом важно предусмотреть также упражнения на исследование того, являются ли бинарными оппозициями, т.е. взаимно исключающими друг друга, такие свойства, как ограниченность и сходимость для последовательности, непрерывность и монотонность для функции, неравномерная сходимость и дифференцируемость для суммы функционального ряда и т.д.

Прием смысловых опор состоит в делении изучаемого материала на части так, что каждая часть несет смысловую нагрузку, отражающую ключевые отношения в рассматриваемом материале. Например, формулировки критерия О. Коши сходимости и равномерной сходимости приводятся в курсе математического анализа, по крайней мере, пять раз для различных математических объектов – числовых последовательностей, функций, числовых и функциональных рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметра. Систематизацию определений некоторых математических объектов можно произвести с помощью этого приема. Приведем пример его использования.

Определение равномерной сходимости функционального ряда и несобственного интеграла укладывается практически в единую "канву", внутри которой варьируются лишь рассматриваемые объекты. Например, для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), x \in X \subset R, S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ определение равномерной сходимости на языке "$\varepsilon \div \delta$" запишется в виде "цепочки":

$$\left\langle\ \forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon\in N:\forall n>n_\varepsilon\ \right\rangle\left\langle\ \forall x\in X\ \right\rangle\left\langle\ \left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon\ \right\rangle.$$

Для несобственного интеграла

$$I(x)=\int_a^w f(t,x)\,dt,\ x\in X\subset R$$

с особенностью в точке w определение его равномерной сходимости на множестве X может быть записано в виде

$$\left\langle\forall\varepsilon>0\,\exists\eta_\varepsilon\in(a,w):\forall\eta\in(\eta_\varepsilon,w)\ \right\rangle\left\langle\ \forall x\in X\ \right\rangle\left\langle\ \left|\int_a^{\eta_\varepsilon} f(t,x)\,dt-I(x)\right|<\varepsilon\ \right\rangle.$$

В этих определениях однотипны три существенных фрагмента (они разделены значками $\langle\ \rangle$). С точки зрения их сущности, эти фрагменты неизменны:

– первый, что для любого положительного ε существует некоторый объект, зависящий от выбора ε ($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \ldots$);

– второй что рассматриваемое далее условие должно выполняться на всем множестве X, т.е. $\forall x\in X$;

– третий – оценка модуля разности рассматриваемых математических объектов, один из которых является предельным значением другого.

Разделение символьной записи на фрагменты, при котором каждый фрагмент является отражением некоторого ключевого отношения, мы называем приемом смысловых опор. Таким образом, выделенные выше фрагменты являются смысловыми опорами понятия равномерной сходимости. Необходимо подчеркнуть, что существенно важным является порядок следования выделенных фрагментов. Если фрагменты, стоящие в приведенных формулировках на втором месте переместить на первое, то получим определение не равномерной, а поточечной сходимости функционального ряда или несобственного интеграла. Это как перенос запятой в известной фразе “Казнить нельзя помиловать”.

В математике формализация – это не только запись содержания на некотором языке, но и построение формальной системы, т.е. системы операций над объектами, понимаемыми как последовательности символов (аналогично словам в алфавитах). Вместе с тем необходимо подчеркнуть “относительность” математических утверждений, которая требует большой аккуратности, соблюдения математической корректности и грамотного использования символьного языка математики. Например, верна запись $\sin x=O(1)$, но, вообще говоря, не верна $O(1)=\sin x$.

Использование приема смысловых опор также целесообразно при работе с определениями непрерывности и дифференцируемости функций одной и многих переменных, а также некоторыми другими понятиями курса.

Здесь прослеживаются семиотические связи, опирающиеся на сущностные математические отношения. Кроме того, разделение достаточно громоздкой символьной записи на части способствует лучшему усвоению сущности определения, поскольку согласуется с психолого-дидактическими закономерностями мышления и памяти. Согласно этим закономерностям, наличие более трех логических связок в формулировке утверждения существенно затрудняет его понимание и запоминание [5].

В этом случае знаниевая компонента ***практики обучения*** состоит в приобретении навыков исследования на сходимость и равномерную сходимость соответствующих конкретно заданных несобственных интегралов, зависящих от параметра или функциональных рядов. Знаниевая составляющая ***теории обучения***, на наш взгляд, является здесь более значимой, чем практики обучения, поскольку она состоит в систематизации математического знания, посредством аналогии позволяет упорядочить кажущиеся дискретными математические факты и объекты, увидеть логику и внутреннюю взаимосвязь изучаемых понятий. Использование метода аналогий является весьма важной составляющей процесса обучения, которая развивает умения обобщать, разделять сложную формулировку на составляющие по ключевым признакам, способствуя формированию творческого математического мышления.

В практике обучения студентов также хорошо себя зарекомендовал прием алгоритмизации. **Прием алгоритмизации** в методической системе интеграции теории и практики обучения студентов используется для систематизации учебного материала. В курсе математического анализа он применяется при:

– исследовании функций одной и нескольких переменных на экстремум;

– составлении интегральных сумм при введении понятий таких определенных интегралов, как интеграл Римана, криволинейные, поверхностные интегралы первого и второго рода и кратные интегралы;

– осуществлении замены переменной в соответствии с разработанной нами формулой в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные разного порядка функций нескольких переменных;

– расстановке пределов интегрирования в кратных интегралах;

– исследовании функциональных рядов и несобственных интегралов на сходимость и равномерную сходимость и т.д.

Кроме того, определения непрерывности и дифференцируемости в точке функции одной переменной и нескольких переменных, определения равномерной сходимости также осуществляются по одному алгоритму, различается лишь степень обобщения изучаемых математических понятий. Практика обучения свидетельствует о том, что усвоение материала является более успешным, если применять прием алгоритмизации, например, при исследовании функциональных рядов на равномерную сходимость по признакам Абеля или Дирихле или по супремальному критерию. Как правило, даже выучив формулировку этого признака наизусть, студенты не связывают перечисляемые требования с практическими действиями, которые необходимо совершить для исследования в конкретном примере.

Пример 1. Проиллюстрируем это на примере критерия равномерной сходимости функциональных рядов, который называют еще супремальным, чтобы отличать его от критерия Коши.

Сформулируем **критерий равномерной сходимости** функциональной последовательности: функциональная последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве $X \subset R$ к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0 .$$

Алгоритм исследования функциональной последовательности в соответствии с этим критерием на равномерную сходимость состоит из следующих шагов:

1. Найти предельную функцию последовательности $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

2. Выписать выражение $f_n(x) - f(x)$.

3. Найти верхнюю грань значений его модуля: $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$.

Для этого можно применить обычную схему нахождения экстремума функции, т.е.

а) вычислить производную выражения $f_n(x) - f(x)$;

б) найти нули производной, т.е. решить уравнение

$$\left(f_n(x) - f(x)\right)' = 0;$$

в) исследуя знак производной в окрестности найденных точек, установить, какие из них будут точками максимума. Напомним, что x_0 является точкой максимума, если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$.

4. Вычислить значения выражения в точках максимума и на границе множества $X \subset R$. Выбрать максимальное из найденных значений, которое и будет $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$. Как правило, оно представляет собой выражение, зависящее не только от переменной x, но и от n.

5. Перейти к пределу при $n \to \infty$ в полученном на предыдущем шаге выражении. Тем самым вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|$.

6 Если полученный предел равен нулю, последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на $X \subset R$. В противном случае сходимость будет неравномерной.

Как видно из приведенного примера, выполнение данного задания предполагает формирование интегративного умения исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость. Интегративный характер задания заключается в том, что его выполнение требует умений разложить сложную задачу на составляющие, систематизировать их и выполнить соответствующие действия. Эти действия включают владение навыками:

– вычислять пределы;

– находить производные;

– исследовать функцию на экстремум.

Практика свидетельствует, что наибольшие трудности вызывают третий и четвертый шаги, которые связаны с исследованием свойств функционального выражения. Чтобы выполнить задания успешно, необходимо актуализировать знания и умения по исследованию функций, которые были приобретены частично еще в школе, затем – на первом курсе вуза при изучении математического анализа.

Пример 2. Схема исследования несобственного интеграла на сходимость.

1. Выявить особые точки несобственного интеграла. К ним относятся:

а) точки промежутка интегрирования, в которых подынтегральное выражение неограничено;

б) бесконечные точки промежутка интегрирования.

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл в каждой особой точке, применяя признак сравнения либо метод выделения главной части или сравнения с эквивалентной функцией, сходимость (или расходимость) несобственного интеграла от которой известна.

3. Выписать условия сходимости интеграла в каждой особой точке. Если эти условия могут выполняться одновременно – интеграл сходится. Если условия несовместимы – интеграл расходится.

Таким образом, при исследовании на сходимость несобственных интегралов (в том числе зависящих от параметра) ответом является условие, являющееся пересечением условий, полученных для каждой из особых точек.

Пример 3. Алгоритм исследования функционального ряда на равномерную сходимость по признаку Дирихле.

1. Представить общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X$ (1) в виде двух сомножителей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$.

2. Составить частичную сумму ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

3. Проверить, будет ли эта сумма равномерно ограниченной на множестве X, т.е. найти такое число $M > 0$, чтобы выполнялось условие $\left|S_n(x)\right| < M\ \forall n \in N, \forall x \in X$.

4. Рассмотреть последовательность функций $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Проверить для нее выполнение условий:

а) $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – монотонно не возрастает;

б) последовательность $(b_n(x))_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой $\forall x \in X$, т. е. $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in X$.

Если условия 3)–4) выполняются, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X$ согласно признаку Дирихле сходится на множестве X равномерно.

Заключение

Составление и использование для исследования некоторого алгоритма способствует усвоению и осознанному применению типичных для математического анализа теоретических положений и практических заданий. Как показала практика, со временем у студентов вырабатывается потребность в разработке схемы действий при выполнении многих заданий или упражнений.

Установление аналогий между различными содержательно-методическими линиями курса математического анализа дает возможность студентам легче преодолеть психологический барьер, вызванный боязнью не разобраться в огромном объеме нового трудного материала. Учет психологической, методической и знаниевой компонент при введении понятий является примером интеграции теории и практики обучения студентов математике. Тем самым интеграция теории и практики обучения по содержанию и способам научной организации умственного труда студентов выражается:

– в актуализации ведущих идей и опорных понятий раздела;
– формировании у студентов проблемного и панорамного видения содержания;
– обучении их систематизации и алгоритмизации рассмотрения тех или иных вопросов, решении задач, характерных для данного раздела;
– установлении преемственных внутридисциплинарных связей изученного с последующим как по содержанию, так и по способам изучения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Бровка, Н.В.*** Концептуальные основы интеграции теории и практики обучения математике студентов педагогических потоков математических факультетов / Н.В. Бровка // Вес. Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. – 2007. – № 4. – С. 17-21.
2. ***Степаненков, Н.К.*** Педагогика: учеб. пособие / Н.К. Степаненков. – Минск: Скакун, 1998. – 448 с.
3. ***Столяр, А.А.*** Педагогика математики: курс лекций / А.А. Столяр. – 2-е изд. – Минск: Высш. шк., 1986. – 414 с.
4. ***Архангельский, С.И.*** Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С.И. Архангельский. – М.: Высш. шк., 1980. – 367 с.
5. Формирование учебной деятельности студентов / В.Л. Ляудис [и др.]; под ред. В.Л. Ляудис. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989. – 240 с.

Поступила в редакцию 18.08.2009 г.