УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

Σ-НОРМАЛЬНЫЕ n-АРНЫЕ ПОДГРУППЫ

В теории n-арных групп существуют различные обобщения нормальных подгрупп группы: инвариантные n-арные подгруппы; полуинвариантные n-арные подгруппы; m-полуинвариантные n-арные подгруппы; нормальные n-арные подгруппы. При n = 2 все указанные обобщения совпадают с определением нормальной подгруппы группы. M-Полуинвариантные n-арные подгруппы и нормальные n-арные подгруппы n-арной группы полуинвариантны в ней. Кроме того, инвариатные n-арные подгруппы и полуинвариантные n-арные подгруппы являются частными случаями m-полуинвариантных n-арных подгрупп при m = 2 и m = n соответственно, то есть инвариантные n-арные подгруппы и полуинвариантные n-арные подгруппы могут изучаться в рамках общего понятия – m-полуинвариантных n-арных подгрупп. Оказывается, общим понятием можно охватить также инвариантные n-арные подгруппы и нормальные n-арные подгруппы n-арной группы, так как и те и другие являются частными случаями нового понятия – Σ-нормальной n-арной подгруппы, изучаемого в данной статье.

Инвариантные, полуинвариантные, m-полуинвариантные, а также нормальные n-арные подгруппы n-арной группы определяются следующим образом.

n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется:

1) инвариантной в $< A, [\ ] >$, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B\ldots B}_{n-3}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$ [1];

2) полуинвариантной в $< A, [\ ] >$, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$ [1];

3) m-полуинвариантной в $< A, [\ ] >$, если $m - 1$ делит $n - 1$ и

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{m-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-m}] = [\underbrace{B\ldots B}_{2(m-1)}x\underbrace{B\ldots B}_{n-2m+1}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$ [2];

4) нормальной в $< A, [\ ] >$, если

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_2 \ldots x_{n-1}x_1]$$

для любых $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ [3].

Определение. Пусть Σ – подмножество множества S_{n-1} всех подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. n-Арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется Σ-нормальной в $< A, [\ ] >$, если

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n-1)}] \qquad (1)$$

для всех $x, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$ и любой подстановки σ из Σ.

Если $\Sigma = \{\sigma\}$, то Σ-нормальную n-арную подгруппу будем называть σ-нормальной.

Лемма 1 [4]. Если < B, [ ] > n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, то следующие утверждения эквивалентны:

1) < B, [ ] > – инвариантна в < A, [ ] >;

2) $[\alpha B\beta] = B$ для любых взаимно обратных последовательностей α и β, составленных из элементов множества A;

3) $[xB\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = B$ для любого $x \in A$;

Предложение 1. n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является инвариантной в < A, [ ] > тогда и только тогда, когда она ε-нормальна в < A, [ ] >, где ε – тождественная подстановка из S_{n-1}, то есть тогда и только тогда, когда

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_1x_2 \ldots x_{n-1}] \qquad (2)$$

для всех $x, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$.

Доказательство. *Необходимость.* Так как < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >, то, согласно лемме 1, $[\alpha B\beta] = B$, где $\alpha = x_1x_2 \ldots x_{n-1}$, β – обратная последовательность для α. Тогда, учитывая нейтральность последовательности $\beta\alpha$, получим

$$[[\alpha B\beta]\alpha] = [B\alpha],\ [\alpha B] = [B\alpha],$$

то есть верно (2).

Достаточность. Полагая в (2) $x_1 = x \in A$, $x_2 = \ldots = x_{n-1} = b \in B$, получаем

$$[x\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B] = [Bx\underbrace{b\ldots b}_{n-2}],$$

откуда, учитывая нейтральность последовательностей

$$\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2},\ \underbrace{b\ldots b}_{n-2}\bar{b},\ \underbrace{x\ldots x}_{n-2}\bar{x},$$

а также тот факт, что $\bar{b} \in B$, последовательно будем иметь

$$[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2}[x\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B]\bar{b}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = [\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2}[Bx\underbrace{b\ldots b}_{n-2}]\bar{b}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}],$$

$$[x[\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B\bar{b}]\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = [\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B],\ [xB\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = B$$

для любого $x \in A$. Тогда, согласно лемме 1, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >. Предложение доказано.

Если $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)$ – циклическая подстановка на n – 1 символах, то

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n-1)} = x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_1,$$

и равенство (1) принимает вид

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_2x_3 \ldots x_{n-1}x_1].$$

Поэтому имеет место

Предложение 2. n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является нормальной в < A, [ ] > тогда и только тогда, когда она σ-нормальна в < A, [ ] >, где $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)$.

Таким образом, инвариантные n-арные подгруппы – это в точности ε-нормальные n-арные подгруппы для тождественной подстановки ε, а нормальные n-арные подгруппы – это в точности σ-нормальные n-арные подгруппы для подстановки $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)$.

Понятно, что n-арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является одновременно и инвариантной и нормальной в < A, [ ] > тогда и только тогда, когда она Σ-нормальна в < A, [ ] >, где $\Sigma = \{\varepsilon, \sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)\}$.

Лемма 2. Если < B, [ ] > – σ-нормальная n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] > и σ(j) = i для некоторых i, j ∈ {1, …, n – 1), то

$$[\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}] = [\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}]$$

для любого x ∈ A.

Доказательство. Сразу же заметим, что если j = i – 1, то равенство из условия леммы 2 принимает вид

$$[\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}] = [\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}],$$

не требующий доказательства. Поэтому случай j = i – 1 можно не рассматривать.

Положим $x_i = x \in A$. Так как σ(j) = i, то равенство (1) примет вид

$$[x_1 \dots x_{i-1}xx_{i+1} \dots x_{n-1}B] = [Bx_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(j-1)}xx_{\sigma(j+1)} \dots x_{\sigma(n-1)}]. \qquad (3)$$

Если $u = [b_1 \dots b_{i-1}xb_{i+1} \dots b_{n-1}b]$ – произвольный элемент из $[\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}]$,

то ввиду (3),

$$[b_1 \dots b_{i-1}xb_{i+1} \dots b_{n-1}b] = [cb_{\sigma(1)} \dots b_{\sigma(j-1)}xb_{\sigma(j+1)} \dots b_{\sigma(n-1)}]$$

для некоторого c ∈ B, где, как легко заметить, из условия σ(j) = i следует, что для любого

$$r \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n-1\}$$

существует такое

$$s \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1\},$$

что $b_{\sigma(r)} = b_s \in B$, то есть

$$b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(j-1)}, b_{\sigma(j+1)}, \dots, b_{\sigma(n-1)} \in B.$$

Следовательно,

$$u = [b_1 \dots b_{i-1}xb_{i+1} \dots b_{n-1}b] \in [\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}],$$

откуда, ввиду произвольного выбора u, следует включение

$$[\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}] \subseteq [\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}]. \qquad (4)$$

Если $v = [bb_1 \dots b_{j-1}xb_{j+1} \dots b_{n-1}]$ – произвольный элемент из $[\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}]$,

то, положив

$$c_{\sigma(1)} = b_1, \dots, c_{\sigma(j-1)} = b_{j-1}, c_{\sigma(j+1)} = b_{j+1}, \dots, c_{\sigma(n-1)} = b_{n-1},$$

и, используя (3), получим

$$[c_1 \dots c_{i-1}xc_{i+1} \dots c_{n-1}c] = [bc_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(j-1)}xc_{\sigma(j+1)} \dots c_{\sigma(n-1)}]$$

для некоторого c ∈ B, где, как легко заметить, из условия σ(j) = i вытекает

$$c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_{n-1} \in B.$$

Следовательно,

$$v = [bb_1 \dots b_{j-1}xb_{j+1} \dots b_{n-1}] = [bc_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(j-1)}xc_{\sigma(j+1)} \dots c_{\sigma(n-1)}] \in [\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}],$$

откуда, ввиду произвольного выбора v, следует включение

$$[\underbrace{B\dots B}_{j}x\underbrace{B\dots B}_{n-j-1}] \subseteq [\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}]. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 3. n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является инвариантной в < A, [ ] >, если для любого $x \in A$ и некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) $[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}]$, $[\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}] = [\underbrace{B\dots B}_{n-1}x]$;

2) $[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB]$, $[\underbrace{B\dots B}_{i-1}x\underbrace{B\dots B}_{n-i}] = [\underbrace{B\dots B}_{n-1}x]$;

3) $[\underbrace{B\dots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB]$, $[\underbrace{B\dots B}_{n-i}x\underbrace{B\dots B}_{i-1}] = [x\underbrace{B\dots B}_{n-1}]$;

4) $[\underbrace{B\dots B}_{n-1}x] = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}]$, $[\underbrace{B\dots B}_{n-i}x\underbrace{B\dots B}_{i-1}] = [x\underbrace{B\dots B}_{n-1}]$.

Доказательство. 1) Используя первое равенство, получим

$$[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}] = [B[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}]\underbrace{B\dots B}_{n-2}] =$$

$$= [B[Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}]\underbrace{B\dots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B\dots B}_{n-3}] = \dots = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB],$$

то есть

$$[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B\dots B}_{n-3}] = \dots = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB], \qquad (6)$$

откуда и из второго равенства условия 1) следует инвариантность < B, [ ] > в < A, [ ] >.

2) Используя первое равенство, получим

$$[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}[x\underbrace{B\dots B}_{n-1}]B] =$$

$$= [\underbrace{B\dots B}_{n-2}[\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB]B] = [\underbrace{B\dots B}_{n-3}xBB] = \dots = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}],$$

то есть верно (6), откуда и из второго равенства условия 2) следует инвариантность < B, [ ] > в < A, [ ] >.

3) Используя первое равенство, получим

$$[\underbrace{B\dots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB] = [\underbrace{B\dots B}_{n-2}[\underbrace{B\dots B}_{n-1}x]B] =$$

$$= [\underbrace{B\dots B}_{n-2}[\underbrace{B\dots B}_{n-2}xB]B] = [\underbrace{B\dots B}_{n-3}xBB] = \dots = [Bx\underbrace{B\dots B}_{n-2}],$$

то есть

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-2}xB] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-3}xBB] = \ldots = [Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}], \qquad (7)$$

откуда и из второго равенства условия 3) следует инвариантность < B, [ ] > в < A, [ ] >.

4) Используя первое равенство, получим

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x] = [Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] = [B[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] =$$

$$= [B[Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}]\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] = [BBx\underbrace{B\ldots B}_{n-3}] = \ldots = [\underbrace{B\ldots B}_{n-2}xB],$$

то есть верно (7), откуда и из второго равенства условия 4) следует инвариантность < B, [ ] > в < A, [ ] >. Лемма доказана.

Теорема. σ-Нормальная n-арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является инвариантной в < A, [ ] >, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) $\sigma(i) = i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$;
2) $\sigma(j) = j + 2$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-3\}$;
3) $\sigma(n-2) = 1$;
4) $\sigma(n-1) = 2$.

Доказательство. 1) Полагая в (1)

$$x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_{n-1} = b \in B,\ x_i = x \in A,$$

получаем

$$[\underbrace{b\ldots b}_{i-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}B] = [B\underbrace{b\ldots b}_{i-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}],$$

откуда, учитывая нейтральность последовательностей

$$\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2},\quad \underbrace{b\ldots b}_{n-2}\bar{b},\quad \underbrace{x\ldots x}_{n-2}\bar{x},$$

а также тот факт, что $\bar{b} \in B$, последовательно будем иметь

$$[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}[\underbrace{b\ldots b}_{i-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}B]\underbrace{b\ldots b}_{i-1}\bar{b}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] =$$

$$= [\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}[B\underbrace{b\ldots b}_{i-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}]\underbrace{b\ldots b}_{i-1}\bar{b}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}],$$

$$[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2}x[\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}B\underbrace{b\ldots b}_{i-1}\bar{b}]\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = [[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-i-1}B\underbrace{b\ldots b}_{i-1}]x\underbrace{b\ldots b}_{n-2}\bar{b}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}],$$

$$[xB\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{x}] = B$$

для любого $x \in A$. Тогда, согласно лемме 1, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

2) Полагая в (1)

$$x_1 = \ldots = x_{j+1} = x_{j+3} = \ldots = x_{n-1} = b \in B,\ x_{j+2} = x \in A,$$

получим

$$[\underbrace{b\ldots b}_{j+1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}B]=[B\underbrace{b\ldots b}_{j-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-1}],$$

откуда

$$[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}[\underbrace{b\ldots b}_{j+1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}B]\underbrace{b\ldots b}_{j+1}]=[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}[B\underbrace{b\ldots b}_{j-1}x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-1}]\underbrace{B\ldots B}_{j+1}],$$

$$[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-2}[x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}\underbrace{B\ldots B}_{j+2}]]=[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}B\underbrace{b\ldots b}_{j-1}x[\underbrace{b\ldots b}_{n-j-1}\underbrace{B\ldots B}_{j+1}]],$$

$$[x\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}\underbrace{B\ldots B}_{j+2}]=[\bar{b}\underbrace{b\ldots b}_{n-j-3}B\underbrace{b\ldots b}_{j-1}xB],$$

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-2}xB].$$

Так как по условию $j \neq n-1$, то $\sigma(n-1)=i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j+2$. Применяя лемму 2, получим

$$[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-i}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x].$$

Тогда, согласно утверждению 2) леммы 3, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

3) По лемме 2

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-2}xB]$$

для любого $x \in A$. Так как $\sigma(n-2)=1$, то $\sigma(n-1)=i$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Снова, применяя лемму 2, получаем

$$[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-i}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$. Тогда, согласно утверждению 2) леммы 3, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

4) По лемме 2

$$[Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-2}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$. Так как $\sigma(n-1)=2$, то $\sigma(j)=1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Если положить $j=n-i$, то $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Снова, применяя лемму 2, получаем

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}]=[\underbrace{B\ldots B}_{j}x\underbrace{B\ldots B}_{n-j-1}]=[\underbrace{B\ldots B}_{n-i}x\underbrace{B\ldots B}_{i-1}]$$

для любого $x \in A$. Тогда, согласно утверждению 4) леммы 3, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >. Теорема доказана.

Следствие 1. Если множество Σ содержит подстановку σ, удовлетворяющую по крайней мере одному из условий 1) – 4) теоремы, то Σ-нормальная n-арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является инвариантной в < A, [ ] >.

Предложение 3. σ-Нормальная n-арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является полуинвариантной в < A, [ ] >, если $\sigma(n-1)=1$.

Доказательство. Полагая в (1) $x_1 = x \in A$, $x_2 = \ldots = x_{n-1} = b \in B$, и, учитывая равенство $\sigma(n-1) = 1$, получим

$$[x\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B] = [B\underbrace{b\ldots b}_{n-2}x],$$

откуда

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x],$$

то есть < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >. Предложение доказано.

Так как нормальные n-арные подгруппы n-арной группы – это в точности ее σ-нормальные n-арные подгруппы для подстановки $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)$, то из предыдущего предложения вытекает уже отмечавшаяся полуинвариантность нормальных n-арных подгрупп.

Следствие 2. Если множество Σ содержит подстановку σ, удовлетворяющую условию $\sigma(n-1) = 1$, то Σ-нормальная n-арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > является полуинвариантной в < A, [ ] >.

Так как $S_2 = \{\sigma_1 = \varepsilon$ – тождественная подстановка, $\sigma_2 = (1\ 2)\}$, то имеет место

Следствие 3. Для любой подстановки $\sigma \in S_2$ всякая σ-нормальная тернарная подгруппа < B, [ ] > тернарной группы < A, [ ] > является полуинвариантной в < A, [ ] >, причем:

1) если $\sigma = \varepsilon$, то < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >;

2) если $\sigma = (1\ 2)$, то < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >.

Пусть < B, [ ] > – σ-нормальная 4-арная подгруппа 4-арной группы < A, [ ] >. Так как n = 4, то

$S_{n-1} = S_3 = \{\sigma_1 = \varepsilon, \sigma_2 = (1\ 2), \sigma_3 = (1\ 3), \sigma_4 = (2\ 3), \sigma_5 = (1\ 2\ 3), \sigma_6 = (1\ 3\ 2)\}$.

Если $\sigma = \sigma_1$, то по предложению 1 < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

Если $\sigma = \sigma_2$, то $\sigma(3) = 3$, $\sigma(2) = \sigma(n-2) = 1$. Поэтому либо, ввиду утверждения 1) теоремы, либо, ввиду утверждения 3) этой же теоремы, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

Если $\sigma = \sigma_3$, то $\sigma(2) = 2$, $\sigma(1) = \sigma(3) = \sigma(1+2)$ и, согласно любому из утверждений 1) или 2) теоремы, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

Если $\sigma = \sigma_4$, то $\sigma(1) = 1$, $\sigma(3) = \sigma(n-1) = 2$. Поэтому либо, ввиду утверждения 1) теоремы, либо, ввиду утверждения 4) этой же теоремы, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

Если $\sigma = \sigma_5$, то по предложению 2 < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >.

Если $\sigma = \sigma_6$, то $\sigma(1) = \sigma(3) = \sigma(1+2)$, $\sigma(2) = \sigma(n-2) = 1$, $\sigma(3) = \sigma(n-1) = 2$. Поэтому, ввиду любого из утверждений 2), 3) или 4) теоремы, < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >.

Таким образом, верно

Следствие 4. Для любой подстановки $\sigma \in S_3$ всякая σ-нормальная 4-арная подгруппа < B, [ ] > 4-арной группы < A, [ ] > является полуинвариантной в < A, [ ] >, причем:

1) если $\sigma \in \{\varepsilon, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, то < B, [ ] > инвариантна в < A, [ ] >;

2) если $\sigma = (1\ 2\ 3)$, то < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >.

Согласно следствиям 3 и 4, если n = 3 или n = 4, то в n-арной группе любая σ-нормальная n-арная подгруппа является полуинвариантной, и все они являются либо инвариантными, либо нормальными.

Наличие в n-арной группе σ-нормальных n-арных подгрупп для некоторых подстановок существенно связано с тождествами, которые могут выполняться в этой n-арной группе. Например, в абелевой n-арной группе любая ее n-арная подгруппа является σ-нормальной для любой подстановки $\sigma \in S_{n-1}$, а в полуабелевой n-арной группе все ее n-арные подгруппы являются σ-нормальными для подстановки $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n-1)$, то есть нормальными.

Если в n-арной группе < A, [ ] > выполняется тождество

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n] = [x_{\tau(1)}x_{\tau(2)} \ldots x_{\tau(n-1)}x_{\tau(n)}], \tag{8}$$

где $\tau \in S_n$, и $\tau(1) = n$, то

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_{\tau(2)} \ldots x_{\tau(n-1)}x_{\tau(n)}]$$

для любой n-арной подгруппы < B, [ ] > из < A, [ ] >. Полагая в последнем равенстве

$$\sigma(1) = \tau(2), \ldots, \sigma(n-2) = \tau(n-1), \sigma(n-1) = \tau(n), \tag{9}$$

получим

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}B] = [Bx_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n-1)}],$$

то есть верно (1). Таким образом, имеет место

Предложение 4. Если в n-арной группе < A, [ ] > выполняется тождество (8) для подстановки $\tau \in S_n$, такой, что $\tau(1) = n$, то в < A, [ ] > все n-арные подгруппы являются σ-нормальными для подстановки $\sigma \in S_{n-1}$, определяемой равенствами (9).

Известно, что множество всех инвариантных (нормальных) n-арных подгрупп n-арной группы, содержащих фиксированный элемент, образует подрешетку решетки всех n-арных подгрупп этой n-арной группы [4, теорема 2.3.21; 3, теорема 18]. Поэтому, если $\Sigma = \{\varepsilon\}$, $\Sigma = \{(1\ 2\ \ldots\ n-1)\}$ или $\Sigma = \{\varepsilon, (1\ 2\ \ldots\ n-1)\}$, то множество всех Σ-нормальных n-арных подгрупп n-арной группы, содержащих фиксированный элемент, образует подрешетку решетки всех n-арных подгрупп этой n-арной группы.

Вопрос. Для каких еще множеств Σ, отличных от указанных выше, множество всех Σ-нормальных n-арных подгрупп n арной группы, содержащих фиксированный элемент, образует подрешетку решетки всех n-арных подгрупп этой n-арной группы?

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1-19.
2. ***Гальмак, А.М.*** Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Вып. 5. – 1990. – С. 91-94.
3. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные аналоги нормальных подгрупп / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 2-3(15). – С. 153-159.
4. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.
6. ***Гальмак, А.М.*** Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Мн.: Беларуская навука, 1998. – 128 с.

Поступила в редакцию 14.01.2007 г.