УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

О МНОГОМЕСТНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

В данной работе вначале для любых целых $k \geq 2$ и $l \geq 2$ на декартовой степени A^k произвольного группоида A определяется l-арная операция $[\,]_{l,k}$ и изучаются свойства этой операции. Строятся примеры ассоциативных и неассоциативных операций указанного вида. Отмечается ассоциативность (sk + 1)-арной операции $[\,]_{sk+1,k}$ в случае, когда A – полугруппа, и неассоциативность операции $[\,]_{sk+l,k}$, где $2 \leq l \leq k$ в случае, когда A является группоидом с единицей, содержащим элемент, отличный от единицы. Далее для любых целых $m \geq 2$ и $n \geq 3$ на декартовой степени $B^{m(n-1)}$ множества B определяется n-арная операция $[\,]_{n,m,m(n-1)}$, которая при m = 1 совпадает с n-арной операцией $[\,]_{n,n-1}$. Доказывается ассоциативность n-арной операции $[\,]_{n,m,m(n-1)}$ и приводятся многочисленные следствия этого результата.

Введение

К числу операций на декартовых степенях относятся, например, произведение комплексных чисел, произведение кватернионов и произведение октонионов, которые определены соответственно на 2-ой, 4-ой и 8-ой декартовой степени множества действительных чисел. Все перечисленные выше операции являются бинарными, из них только произведение октонионов является неассоциативным. n-Арные операции на декартовых степенях при n > 2 ранее, как правило, не рассматривались, и по этой причине о них мало что известно. В данной работе для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, $m \geq 2$ и $n \geq 3$ на декартовой степени A^k группоида A определяются l-арная операция $[\,]_{l,k}$ и n-арная операция $[\,]_{n,m,m(n-1)}$, которая при m = 1 совпадает с n-арной операцией $[\,]_{n,n-1}$. Доказывается ассоциативность n-арной операции $[\,]_{n,m,m(n-1)}$ и приводятся многочисленные следствия этого результата.

Определенную на множестве A n-арную операцию [ ] называют ассоциативной, если в A выполняются тождества

$$[[x_1x_2 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1[x_2 \ldots x_nx_{n+1}] \ldots x_{2n-1}] = \ldots = [x_1x_2 \ldots x_{n-1}[x_n \ldots x_{2n-1}]].$$

Впервые такая n-арная операция появилась у Дернте, который использовал ее в своем определении n-арной группы [1]. Если же в A выполняется тождество

$$[[x_1x_2 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1x_2 \ldots x_{n-1}[x_n \ldots x_{2n-1}]],$$

то n-арную операцию [ ] называют полуассоциативной.

Информация по n-арным группам имеется в работах [2 – 5].

1. l-Арная операция $[\,]_{l,k}$. Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1), \tag{1}$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{2}$$

Понятно, что операция $[\,]_{2,k}$ совпадает с операцией $\circ$.

Пример 1. Тернарная $[\ ]_{3,2}$ и 4-арная $[\ ]_{4,2}$ операции, определенные на R^2, где R рассматривается как группоид с обычной операцией умножения чисел, имеют следующий вид:

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)]_{3,2} = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2);$$

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,2} = (x_1y_2z_1u_2, x_2y_1z_2u_1).$$

Тернарная операция $[\ ]_{3,3}$, определенная на R^3, где R снова группоид с обычной операцией умножения чисел, имеет следующий вид

$$[(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3,3} = (x_1y_2z_3, x_2y_3z_1, x_3y_1z_2).$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в ассоциативности тернарной операции $[\ ]_{3,2}$ и неассоциативности 4-арной операции $[\ ]_{4,2}$ и тернарной операции $[\ ]_{3,3}$

Теорема 1. Если А – полугруппа, $n \geq 3$, $s \geq 1$, то операция $[\ ]_{s(n-1)+1,\, n-1}$ является ассоциативной. В частности, ассоциативна n-арная операция $[\ ]_{n,\, n-1}$.

Теорема 2. Пусть А – группоид с единицей, содержащий элемент, отличный от единицы, $k \geq 2$, $2 \leq l \leq k$, $s \geq 0$. Тогда $(sk + l)$-арная операция $[\ ]_{sk+l,\, k}$, определенная на A^k не является полуассоциативной.

Следствие 1. Пусть А – группоид с единицей, содержащий элемент, отличный от единицы, $k \geq 2$, $2 \leq l \leq k$, $s \geq 0$. Тогда $(sk + l)$-арная операция $[\ ]_{sk+l,\, k}$, определенная на A^k, не является ассоциативной.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть А – полугруппа, $n \geq 3$, $[\ ]_{n,\, n-1}$ – n-арная операция, определенная на A^{n-1} формулой (2) при $k = n - 1$, $l = n$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1},\ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,\, n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)}x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)}x_{nj},\ j = 1, \ldots, n - 1.$$

Доказательство. Используя формулы (1) и (2), получим

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_n]_{n,n-1} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots ((x_{(n-1)1}, \ldots, x_{(n-1)(n-1)}) \circ (x_{n1}, \ldots, x_{n(n-1)})) \ldots)) =$$

$$= \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{n-2} \circ (x_{(n-1)1}x_{n2}, x_{(n-1)2}x_{n3}, \ldots, x_{(n-1)(n-2)}x_{n(n-1)}, x_{(n-1)(n-1)}x_{n1})) \ldots)) =$$

$$= \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{n-3} \circ (x_{(n-2)1}x_{(n-1)2}x_{n3}, x_{(n-2)2}x_{(n-1)3}x_{n4}, \ldots$$

$$\ldots, x_{(n-2)(n-2)}x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}, x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2})) \ldots)) =$$

$$\ldots = \mathbf{x}_1 \circ (x_{21}x_{32} \ldots x_{n(n-1)}, x_{22}x_{33} \ldots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}, x_{23} \ldots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2}, \ldots$$

$$\ldots, x_{2(n-2)}x_{3(n-1)}x_{41} \ldots x_{n(n-3)}, x_{2(n-1)}x_{31} \ldots x_{n(n-2)}) =$$

$$= (x_{11}x_{22} \ldots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}, x_{12}x_{23} \ldots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2}, \ldots$$

$$\ldots, x_{1(n-2)}x_{2(n-1)}x_{31} \ldots x_{n(n-2)}, x_{1(n-1)}x_{21} \ldots x_{n(n-1)}).$$

Лемма доказана.

Таким образом, согласно лемме 1,

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,\, n-1} = (x_{11}x_{22} \ldots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}, x_{12}x_{23} \ldots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2}, \ldots$$

$$\ldots, x_{1(n-2)}x_{2(n-1)}x_{31} \ldots x_{n(n-2)}, x_{1(n-1)}x_{21} \ldots x_{n(n-1)}). \quad (3)$$

n-Арная операция $[\ ]_{n,\, m,\, m(n-1)}$. Пусть В – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества А, $< A, \bullet >$ – полугруппа, операцию которой в некоторых случаях для сокращения записей указывать не будем.

Заметим, что если B – полугруппа, то в качестве • можно взять операцию, определенную на $A = B^m$ покомпонентно.

Определим на $B^{m(n-1)}$ n-арную операцию $[\,]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}^{(1)}, \dots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \dots, \alpha_{im}^{(2)}, \dots, \alpha_{i1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{im}^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)},\ i \in \{1, \dots, n\},$$

то

$$[\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n]_{n,\,m,\,m(n-1)} = (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{(n-1)1}, \dots, y_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)}, \quad (4)$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$(y_{j1}, \dots, y_{jm}) = (\alpha_{11}^{(j)}, \dots, \alpha_{1m}^{(j)}) \bullet (\alpha_{21}^{(j+1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(j+1)}) \bullet \dots$$
$$\dots (\alpha_{(n-j)1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{(n-j)m}^{(n-1)}) \bullet (\alpha_{(n-j+1)1}^{(1)}, \dots, \alpha_{(n-j+1)m}^{(1)}) \bullet \dots$$
$$\dots (\alpha_{(n-1)1}^{(j-1)}, \dots, \alpha_{(n-1)m}^{(j-1)}) \bullet (\alpha_{n1}^{(j)}, \dots, \alpha_{nm}^{(j)}) \in B^m,\ j = 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Если положить $\alpha_{ij} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \dots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m$, $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jm})$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$, то

$$\mathbf{y}_j = \alpha_{1j}\alpha_{2(j+1)} \dots \alpha_{(n-j)(n-1)}\alpha_{(n-j+1)1} \dots \alpha_{(n-1)(j-1)}\alpha_{nj} \in B^m.$$

Понятно, что, ввиду (3), при m = 1 n-арная операция $[\,]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ совпадает с n-арной операцией $[\,]_{n,\,n-1}$.

Для доказательства ассоциативности n-арной операции $[\,]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ рассмотрим на $A^{n-1} = \underbrace{B^m \times \dots \times B^m}_{n-1}$ n-арную операцию $[\,]_{n,\,n-1}$ и запишем явный вид этой операции. Для этого для любого $l \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$\mathbf{x}_l = (\mathbf{x}_{l1}, \dots, \mathbf{x}_{l(n-1)}) \in A^{n-1},\ \mathbf{x}_{lj} = (x_{l1}^{(j)}, \dots, x_{lm}^{(j)}) \in B^m,\ j = 1, \dots, n-1,$$

то есть

$$\mathbf{x}_l = ((x_{l1}^{(1)}, \dots, x_{lm}^{(1)}), (x_{l1}^{(2)}, \dots, x_{lm}^{(2)}), \dots, (x_{l1}^{(n-1)}, \dots, x_{lm}^{(n-1)})) \in A^{n-1}.$$

Применяя лемму 1, получим $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]_{n,\,n-1} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1})$, где

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_{1j}\mathbf{x}_{2(j+1)} \dots \mathbf{x}_{(n-j)(n-1)}\mathbf{x}_{(n-j+1)1} \dots \mathbf{x}_{(n-1)(j-1)}\mathbf{x}_{nj} \in B^m$$

или

$$\mathbf{y}_j = (x_{11}^{(j)}, \dots, x_{1m}^{(j)})(x_{21}^{(j+1)}, \dots, x_{2m}^{(j+1)}) \dots (x_{(n-j)1}^{(n-1)}, \dots, x_{(n-j)m}^{(n-1)})$$
$$(x_{(n-j+1)1}^{(1)}, \dots, x_{(n-j+1)m}^{(1)}) \dots (x_{(n-1)1}^{(j-1)}, \dots, x_{(n-1)m}^{(j-1)})(x_{n1}^{(j)}, \dots, x_{nm}^{(j)}).$$

Пример 2. Если m = 2, n = 3, то

$$\alpha_1 = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)}),\ \alpha_2 = (\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)}, \alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)}),\ \alpha_3 = (\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}, \alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}),$$
$$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]_{3,\,2,\,4} = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}),$$

где

$$(y_{11}, y_{12}) = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)})(\alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)})(\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}),$$

$$(y_{21}, y_{22}) = (\alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)})(\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)})(\alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}).$$

Кроме того,

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_{11} = (x_{11}^{(1)},\ x_{12}^{(1)}),\ \mathbf{x}_{12} = (x_{11}^{(2)},\ x_{12}^{(2)})),\ \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_{21} = (x_{21}^{(1)},\ x_{22}^{(1)}),\ \mathbf{x}_{22} = (x_{21}^{(2)},\ x_{22}^{(2)})),$$

$$\mathbf{x}_3 = (\mathbf{x}_{31} = (x_{31}^{(1)},\ x_{32}^{(1)}),\ \mathbf{x}_{32} = (x_{31}^{(2)},\ x_{32}^{(2)}),\ [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]_{3,2} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2],$$

где

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_{22}\mathbf{x}_{31} = (x_{11}^{(1)},\ x_{12}^{(1)})(x_{21}^{(2)},\ x_{22}^{(2)})(x_{31}^{(1)},\ x_{32}^{(1)}),$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_{12}\mathbf{x}_{21}\mathbf{x}_{32} = (x_{11}^{(2)},\ x_{12}^{(2)})(x_{21}^{(1)},\ x_{22}^{(1)})(x_{31}^{(2)},\ x_{32}^{(2)}).$$

Для доказательства ассоциативности n-арной операции $[\ ]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ нам понадобится следующая

Лемма 2. n-Арные полугруппы $< B^{m(n-1)}, [\ ]_{n,\,m,\,m(n-1)} >$ и $< A^{n-1}, [\ ]_{n,\,n-1} >$ изоморфны.

Доказательство. Ясно, что отображение φ, ставящее в соответствие элементу

$$(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n-1)}, \ldots, \alpha_m^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)}$$

элемент

$$((\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)}), \ldots, (\alpha_1^{(n-1)}, \ldots, \alpha_m^{(n-1)})) \in A^{n-1},$$

является биекцией $B^{m(n-1)}$ на A^{n-1}.

Кроме того,

$$[\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n]^{\varphi}_{n,\,m,\,m(n-1)} = (y_{11}, \ldots, y_{1m}, y_{21}, \ldots, y_{2m}, \ldots, y_{(n-1)1}, \ldots, y_{(n-1)m})^{\varphi} =$$

$$= ((y_{11}, \ldots, y_{1m}), (y_{21}, \ldots, y_{2m}), \ldots, (y_{(n-1)1}, \ldots, y_{(n-1)m})) =$$

$$= (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{(n-1)}) = (\alpha_{11} \ldots \alpha_{(n-1)(n-1)}\alpha_{n1}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{(n-2)(n-1)}\alpha_{(n-1)1}\alpha_{n2}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_{1j}\alpha_{2(j+1)} \ldots \alpha_{(n-j)(n-1)}\alpha_{(n-j+1)1} \ldots \alpha_{(n-1)(j-1)}\alpha_{nj}, \ldots, \alpha_{1(n-1)}\alpha_{21} \ldots \alpha_{(n-1)(n-2)}\alpha_{n(n-1)}) =$$

$$= [(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1(n-1)})(\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2(n-1)}) \ldots (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{n(n-1)})]_{n,\,n-1} =$$

$$= [((\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(1)}), \ldots, (\alpha_{11}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(n-1)}))((\alpha_{21}^{(1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(1)}), \ldots, (\alpha_{21}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(n-1)})) \ldots,$$

$$\ldots, ((\alpha_{n1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(1)}), \ldots, (\alpha_{n1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{n(n-1)}))]_{n,\,n-1} =$$

$$= [(\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(1)}, \ldots, \alpha_{11}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(n-1)})^{\varphi} (\alpha_{21}^{(1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(1)}, \ldots, \alpha_{21}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(n-1)})^{\varphi} \ldots$$

$$\ldots (\alpha_{n1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{n(n-1)})^{\varphi}]_{n,\,n-1} = [\alpha_1^{\varphi}\ \alpha_2^{\varphi}\ \ldots\ \alpha_n^{\varphi}]_{n,\,n-1},$$

то есть

$$[\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n]^{\varphi}_{n,\,m,\,m(n-1)} = [\alpha_1^{\varphi}\ \alpha_2^{\varphi}\ \ldots\ \alpha_n^{\varphi}]_{n,\,n-1}$$

Следовательно φ – искомый изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 2 и теорема 1, согласно которой n-арная операция $[\ ]_{n,\,n-1}$ является ассоциативной, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. n-Арная операция $[\ ]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ ассоциативна.

Если в теореме 2 положить $m = 2$, то получим

Следствие 2. n-Арная операция $[\ ]_{n,\,2,\,2(n-1)}$ ассоциативна.

Если в определении операции $[\ ]_{n,\,m,\,m(n-1)}$ положить $m = 2$, $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, \bullet >$ – полугруппа комплексных чисел с операцией

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

то из следствия 2 вытекает

Следствие 3. Определенная на R^4 тернарная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)] = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_1 - x_2y_4z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_3z_2,\ r_2 = x_1y_3z_2 - x_2y_4z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3 - x_4y_2z_3 - x_3y_2z_4 - x_4y_2z_4,\ r_4 = x_3y_1z_4 - x_4y_2z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3,$$

является ассоциативной.

Если в определении операции $[\ ]_{n,\ m,\ m(n-1)}$ положить $m = 2$, $n = 3$, $B = \mathrm{R}$, $< A = \mathrm{R}^2, \bullet >$ – полугруппа двойных чисел с операцией

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac + bd, ad + bc),$$

то из следствия 2 вытекает

Следствие 4. Определенная на R^4 тернарная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)] = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_1 + x_2y_4z_1 + x_1y_4z_2 + x_2y_3z_2,\ r_2 = x_1y_3z_2 + x_2y_4z_2 + x_1y_3z_1 + x_2y_4z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3 + x_4y_2z_3 + x_3y_2z_4 + x_4y_1z_4,\ r_4 = x_3y_1z_4 + x_4y_2z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3,$$

является ассоциативной.

Если в определении операции $[\ ]_{n,\ m,\ m(n-1)}$ положить $m = 2$, $n = 3$, $B = \mathrm{R}$, $< A = \mathrm{R}^2, \bullet >$ – полугруппа дуальных чисел с операцией

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac, ad + bc),$$

то из следствия 2 вытекает

Следствие 5. Определенная на R^4 тернарная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)] = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_2y_3z_1,\ r_2 = x_1y_3z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1,\ r_3 = x_3y_1z_3,\ r_4 = x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3,$$

является ассоциативной.

Если в определении операции $[\ ]_{n,\ m,\ m(n-1)}$ положить $m = 2$, $n = 4$, $B = \mathrm{R}$, $< A = \mathrm{R}^2, \bullet >$ – полугруппа комплексных чисел, то из следствия 2 вытекает

Следствие 6. Определенная на R^6 4-арная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,\ 2,\ 6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_5u_1 - x_2y_3z_5u_1 - x_1y_4z_6u_1 - x_2y_3z_6u_1 -$$

$$- x_1y_3z_6u_2 + x_2y_4z_6u_2 - x_1y_4z_5u_2 - x_2y_3z_5u_2,$$

$$r_2 = x_1y_3z_5u_2 - x_2y_4z_5u_2 - x_1y_4z_6u_2 - x_2y_3z_6u_2 +$$

$$+ x_1y_3z_6u_1 - x_2y_4z_6u_1 + x_1y_4z_5u_1 + x_2y_3z_5u_1,$$

$$r_3 = x_3y_6z_1u_3 - x_4y_6z_1u_3 - x_3y_6z_2u_3 - x_4y_5z_2u_3 -$$

$$- x_3y_5z_2u_4 + x_4y_6z_2u_4 - x_3y_6z_1u_4 - x_4y_5z_1u_4,$$

$$r_4 = x_3y_5z_1u_4 - x_4y_6z_1u_4 - x_3y_6z_2u_4 - x_4y_5z_2u_4 +$$

$$+ x_3y_5z_2u_3 - x_4y_6z_2u_3 + x_3y_6z_1u_3 + x_2y_3z_1u_3,$$

$$r_5 = x_5y_1z_3u_5 - x_6y_2z_3u_5 - x_5y_2z_4u_5 - x_6y_1z_4u_5 -$$

$$- x_5y_1z_4u_6 + x_6y_2z_4u_6 - x_5y_2z_3u_6 - x_6y_1z_3u_6,$$

$$r_6 = x_5y_1z_3u_6 - x_6y_2z_3u_6 - x_8y_3z_4u_6 - x_6y_1z_4u_6 +$$
$$+ x_8y_5z_4u_5 - x_3y_3z_4u_5 + x_8y_8z_3u_5 + x_6y_1z_3u_5,$$

является ассоциативной.

Если в определении операции $[\ ]_{n,\, m,\, m(n-1)}$ положить $m = 4$, $n = 3$, $B = \mathrm{R}$, $< A = \mathrm{R}^4, \bullet >$ – полугруппа кватернионов с операцией

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \bullet (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\ a_1b_2 + b_2a_1 + c_1d_2 - d_1c_2,$$
$$a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2,\ a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2),$$

то из теоремы 1 вытекает

Следствие 7. Определенная на R^8 тернарная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)]_{3,\,4,\,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8),$$

где

$$r_1 = x_1y_5z_1 - x_2y_6z_1 - x_3y_7z_1 - x_4y_8z_1 - x_1y_6z_2 - x_2y_5z_2 - x_3y_8z_2 + x_4y_2z_2 -$$
$$- x_1y_5z_3 - x_3y_5z_3 - x_4y_6z_3 + x_2y_8z_3 - x_1y_8z_4 - x_4y_5z_4 - x_2y_7z_4 + x_3y_6z_4,$$
$$r_2 = x_1y_5z_2 - x_2y_6z_2 - x_8y_3z_2 - x_4y_8z_2 + x_1y_6z_1 + x_2y_5z_1 + x_3y_8z_1 - x_4y_7z_1 +$$
$$+ x_1y_7z_4 + x_3y_5z_4 + x_4y_6z_4 - x_2y_8z_4 - x_1y_8z_3 - x_4y_5z_3 - x_2y_7z_3 + x_3y_6z_3,$$
$$r_3 = x_1y_6z_3 - x_2y_6z_3 - x_3y_7z_3 - x_4y_8z_3 + x_1y_7z_1 + x_3y_5z_1 + x_4y_6z_1 - x_2y_8z_1 +$$
$$+ x_1y_8z_2 + x_4y_5z_2 + x_2y_7z_2 - x_3y_6z_2 - x_1y_6z_4 - x_2y_5z_4 - x_3y_8z_4 + x_4y_7z_4,$$
$$r_4 = x_1y_5z_4 - x_2y_6z_4 - x_3y_7z_4 - x_4y_8z_4 + x_1y_8z_1 + x_4y_5z_1 + x_2y_7z_1 - x_3y_6z_1 +$$
$$+ x_1y_6z_3 + x_2y_5z_3 + x_3y_8z_3 - x_4y_7z_3 - x_1y_7z_2 - x_3y_5z_2 - x_4y_6z_2 + x_2y_8z_2).$$
$$r_5 = (x_5y_1z_5 - x_6y_2z_5 - x_7y_3z_5 - x_8y_4z_5 - x_5y_2z_6 - x_6y_1z_6 - x_7y_4z_6 + x_8y_3z_6 -$$
$$- x_5y_3z_7 - x_6y_1z_7 - x_7y_2z_7 + x_8y_4z_7 - x_5y_4z_8 - x_6y_1z_8 - x_7y_3z_8 + x_8y_2z_8,$$
$$r_6 = x_5y_3z_6 - x_6y_2z_6 - x_7y_3z_8 - x_8y_4z_6 + x_8y_3z_5 + x_5y_3z_5 + x_7y_4z_5 - x_6y_1z_5 +$$
$$+ x_5y_3z_8 + x_5y_1z_8 + x_7y_3z_8 - x_8y_4z_8 - x_5y_4z_7 - x_5y_3z_7 - x_7y_3z_7 + x_5y_2z_7,$$
$$r_7 = x_6y_2z_7 - x_6y_2z_7 - x_7y_3z_7 - x_8y_4z_7 + x_5y_3z_5 + x_6y_1z_5 + x_7y_2z_5 - x_8y_3z_5 +$$
$$+ x_5y_4z_6 + x_6y_1z_6 + x_7y_3z_6 - x_8y_2z_6 - x_6y_2z_8 - x_6y_1z_8 - x_7y_4z_8 + x_8y_8z_8,$$
$$r_8 = x_5y_1z_8 - x_8y_5z_8 - x_7y_3z_8 - x_5y_1z_8 + x_5y_4z_5 + x_6y_1z_5 + x_7y_3z_5 - x_8y_3z_5 +$$
$$+ x_5y_2z_7 + x_6y_1z_7 + x_7y_4z_7 - x_8y_3z_7 - x_8y_3z_6 - x_6y_1z_6 - x_7y_2z_6 + x_8y_4z_6)$$

является ассоциативной.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dömte, W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornte // Math. Z. –. 1928. – Bd. 29. – S. 1-19.
2. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P.208-350.
3. ***Русаков, С.А.*** Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992.
4. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003.
5. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд.центр БГУ, 2007.

Поступила в редакцию 14.03.2008 г.