УДК 512.548

Г.Н. ВОРОБЬЕВ

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ В n-АРНЫХ ПОЛУГРУППАХ

n-Арной полугруппой называют универсальную алгебру с одной ассоциативной n-арной операцией, то есть универсальную алгебру < А, [ ] >, в которой для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}].$$

Обычные полугруппы являются частным случаем n-арных полугрупп при n = 2, так как в этом случае приведенные выше тождества n-арной ассоциативности принимают вид (ab)c = a(bc). n-Арную полугруппу, в которой для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}\, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ однозначно разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1} x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b,$$

называют n-арной группой.

В настоящей работе изучается перестановочность элементов в n-арных полугруппах. Получены достаточные условия m-полуабелевости, в частности абелевости и полуабелевости, n-арной полугруппы. Доказано, что полуабелева n-арная группа с непустым m-полуцентром является m-полуабелевой.

Вспомогательные понятия и результаты. Последовательности α и β элементов n-арной группы < А, [ ] > называются эквивалентными в ней [1], если существуют последовательности γ и δ элементов этой же n-арной группы такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Если последовательности α и β элементов n-арной группы эквивалентны в ней, то для сокращения записей будем употреблять обозначение $\alpha \sim \beta$.

Лемма 1. [1, 2]. Если $\alpha \sim \beta$ в n-арной группе < А, [ ] >, то $[\nu\alpha\mu] = [\nu\beta\mu]$ для любых последовательностей ν и μ элементов из А и таких, что

$$l(\nu) + l(\alpha) + l(\mu) \equiv 1 \pmod{n-1},$$

где $l(\beta)$ – длина последовательности β.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арной полугруппы < А, [ ] > называется левой (правой) нейтральной, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = x \quad ([xe_1 \ldots e_{n-1}] = x).$$

Последовательность, которая одновременно является и левой нейтральной и правой нейтральной, называют нейтральной.

В любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности.

С помощью m-арной операции [ ], определенной на множестве А, можно для всякого $n = k(m-1) + 1$, где $k \geq 1$, определить n-арную операцию ( ):

$$(a_1 \ldots a_n) = [[\ldots [[a_1 \ldots a_m]a_{m+1} \ldots a_{2m-1}] \ldots]a_{(k-1)(m-1)+2} \ldots a_{k(m-1)+1}].$$

В этом случае n-арная полугруппа < А, ( ) > и n-арная операция ( ) называются *производными* соответственно от m-арной полугруппы < А, [ ] > и m-арной операции [ ]. В дальнейшем, чтобы не вводить лишние символы, будем полагать

$$(a_1 \ldots a_n) = [a_1 \ldots a_{k(m-1)+1}].$$

n-Арная группа < А, [ ] > называется m-полуабелевой [1], если $m-1$ делит $n-1$ и последовательности $aa_1 \ldots a_{m-2}b$ и $ba_1 \ldots a_{m-2}a$ эквивалентны в < А, [ ] > для всех $a, a_1, \ldots, a_{m-2}, b \in A$. 2-полуабелевые n-арные группы называют абелевыми. Таким образом, абелевы n-арные группы – это n-арные группы, удовлетворяющие тождеству

$$[aba_2 \ldots a_n] = [baa_2 \ldots a_n].$$

Абелевы n-арные группы можно определить также [3], как n-арные группы, в которых для любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}].$$

n-Полуабелевы n-арные группы называют полуабелевыми, то есть n-арная группа < A, [ ] > называется полуабелевой [3], если в ней выполняется тождество

$$[aa_1 \ldots a_{n-2} b] = [ba_1 \ldots a_{n-2} a].$$

При n = 2 понятия абелевости, полуабелевости и m-полуабелевости совпадают. Если же n > 2, то все три указанные понятия различны. Например, легко проверяется [4], что тернарная группа $< B_n, [\,] >$ всех отражений правильного n-угольника является полуабелевой, но не является абелевой.

Лемма 2 [5, 6]. n-Арная группа < A, [ ] > является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in A$ и некоторого $c \in A$ в < A, [ ] > эквивалентны последовательности $a \underbrace{c \ldots c}_{m-2} b$ и $b \underbrace{c \ldots c}_{m-2} a$.

Абелевы и полуабелевы n-арные полугруппы определяются теми же тождествами, что и абелевы и полуабелевы n-арные группы.

m-Полуцентром n-арной группы < A, [ ] >, где $n = k(m-1) + 1$, $k \geq 1$, называется [7, 8] множество

$$Z(A, m) = \{z \in A \mid z x_1^{m-2} x \sim x x_1^{m-2} z,\ \forall x, x_1, \ldots, x_{m-2} \in A\}.$$

Если m = 2, то последовательность x_1^{m-2} – пустая, а определение m-полуцентра совпадает с определением центра, то есть Z(A) = Z(A, 2). Если m = n, то n-полуцентр называется полуцентром и обозначается символом HZ(A), то есть HZ(A) = Z(A, n). Ясно, что

$$HZ(A) = \{z \in A \mid [z x_1^{n-2} x] = [x x_1^{n-2} z],\ \forall x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A\}.$$

Основные результаты. Следующее определение расширяет понятие m-полуабелевой n-арной группы на n-арные полугруппы.

Определение. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $k \geq 1$. n-Арная полугруппа < A, [ ] > называется m-полуабелевой, если в ней для любых t = 0, 1, …, k – 1 выполняется тождество

$$[x_1 \ldots x_{t(m-1)} x_{t(m-1)+1} x_{t(m-1)+2} \ldots x_{(t+1)(m-1)} x_{(t+1)(m-1)+1} x_{(t+1)(m-1)+2} \ldots x_{k(m-1)+1}] =$$
$$= [x_1 \ldots x_{t(m-1)} x_{(t+1)(m-1)+1} x_{t(m-1)+2} \ldots x_{(t+1)(m-1)} x_{t(m-1)+1} x_{(t+1)(m-1)+2} \ldots x_{k(m-1)+1}]. \quad (1)$$

Если положить

$$x = x_{t(m-1)+1},\ y = x_{(t+1)(m-1)+1},\ \alpha_i = x_{(i-1)(m-1)+2} \ldots x_{i(m-1)},\ i = 1, \ldots k,$$

то тождество (1) можно переписать следующим образом

$$[x_1 \alpha_1 x_m \ldots \alpha_t x \alpha_{t+1} y \alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n] = [x_1 \alpha_1 x_m \ldots \alpha_t y \alpha_{t+1} x \alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n]. \quad (2)$$

Предложение 1. n-Арная полугруппа < A, [ ] >, обладающая правой нейтральной последовательностью, в частности нейтральной последовательностью, является m-полуабелевой, если в ней выполняется тождество

$$[x_1 x_2 \ldots x_{m-1} x_m x_{m+1} \ldots x_n] = [x_m x_2 \ldots x_{m-1} x_1 x_{m+1} \ldots x_n]. \quad (3)$$

Доказательство. Если $e_1 \ldots e_{n-1}$ – правая нейтральная последовательность в < A, [ ] >, то, полагая

$$x = x_{t(m-1)+1},\ y = x_{(t+1)(m-1)+1}$$

и, применяя (3), получим

$$[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t x\alpha_{t+1}y\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n] = [[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t x\alpha_{t+1}y\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n]e_1 \ldots e_{n-1}]=$$
$$= [x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t[x\alpha_{t+1}y\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n e_1 \ldots e_{t(m-1)}]e_{t(m-1)+1} \ldots e_{n-1}] =$$
$$= [x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t[y\alpha_{t+1}x\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n e_1 \ldots e_{t(m-1)}]e_{t(m-1)+1} \ldots e_{n-1}] =$$
$$= [[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t y\alpha_{t+1}x\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n]e_1 \ldots e_{n-1}] = [x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t y\alpha_{t+1}x\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n],$$

то есть верно (2). Следовательно, < A, [ ] > – m-полуабелева n-арная полугруппа. Предложение доказано.

Следующее предложение является двойственным к предложению 1.

Предложение 2. n-Арная полугруппа < A, [ ] >, обладающая левой нейтральной последовательностью, в частности нейтральной последовательностью, является m-полуабелевой, если в ней выполняется тождество

$$[x_1 \ldots x_{n-m}x_{n-m+1}x_{n-m+2} \ldots x_{n-1}x_n] = [x_1 \ldots x_{n-m}x_nx_{n-m+2} \ldots x_{n-1}x_{n-m+1}]. \qquad (4)$$

Доказательство. Если $e_1 \ldots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность в < A, [ ] >, то, полагая

$$x = x_{t(m-1)+1},\ y = x_{(t+1)(m-1)+1}$$

и, применяя (4), получим

$$[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t x\alpha_{t+1}y\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n] = [e_1 \ldots e_{n-1}[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t x\alpha_{t+1}y\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n]]=$$
$$= [e_1 \ldots e_{(t+1)(m-1)-2}[e_{(t+1)(m-1)-1} \ldots e_{n-1}x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t x\alpha_{t+1}y]\alpha_{t+2} \ldots x_{(k-1)(m-1)+1}\alpha_k x_n] =$$
$$= [e_1 \ldots e_{(t+1)(m-1)-2}[e_{(t+1)(m-1)-1} \ldots e_{n-1}x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t y\alpha_{t+1}x]\alpha_{t+2} \ldots x_{(k-1)(m-1)+1}\alpha_k x_n] =$$
$$= [e_1 \ldots e_{n-1}[x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t y\alpha_{t+1}x\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n]] = [x_1\alpha_1x_m \ldots \alpha_t y\alpha_{t+1}x\alpha_{t+2} \ldots \alpha_k x_n],$$

то есть верно (2). Следовательно, < A, [ ] > – m-полуабелева n-арная полугруппа. Предложение доказано.

Теорема 1. Если n-арная полугруппа < A, [ ] > является производной от m-арной полугруппы < A, ( ) >, обладающей нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, то из полуабелевости < A, [ ] > следует полуабелевость < A, ( ) >.

Доказательство. Ясно, что $n = k(m-1) + 1$, где $k \geq 1$.

Легко проверяется, что если $e_1 \ldots e_{m-1}$ – нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность m-арной полугруппы < A, ( ) >, то

$$e_1 \ldots e_{m-2}(e_{m-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-2})$$

также нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность этой же n-арной полугруппы < A, ( ) >. Поэтому, учитывая полуабелевость < A, [ ] >, будем иметь

$$(x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_m) = (x_1x_2 \ldots x_{m-1}e_1 \ldots e_{m-2}(e_{m-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-2})x_m) =$$
$$= [x_1x_2 \ldots x_{m-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-1}x_m] = [x_mx_2 \ldots x_{m-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-1}x_1] =$$
$$= (x_mx_2 \ldots x_{m-1}e_1 \ldots e_{m-2}(e_{m-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-2})x_1) = (x_mx_2 \ldots x_{m-1}x_1),$$

то есть

$$(x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_m) = (x_mx_2 \ldots x_{m-1}x_1),$$

для любых $x_1, \ldots x_m \in A$. Следовательно, $< A, (\ ) >$ – полуабелева. Предложение доказано.

Следствие 1. Если n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является производной от m-арной полугруппы $< A, (\ ) >$, обладающей нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, то из полуабелевости $< A, [\ ] >$ следует m-полуабелевость $< A, [\ ] >$.

Доказательство. По теореме 1 в $< A, (\ ) >$ выполняется тождество

$$(x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_m) = (x_mx_2 \ldots x_{m-1}x_1),$$

откуда следует выполнимость в $< A, (\ ) >$ тождества

$$((x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_m)x_{m+1} \ldots x_n) = ((x_mx_2 \ldots x_{m-1}x_1)x_{m+1} \ldots x_n).$$

Так как $< A, [\ ] >$ является производной от $< A, (\ ) >$, то последнее тождество равносильно тождеству

$$[x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_mx_{m+1} \ldots x_n] = [x_mx_2 \ldots x_{m-1}x_1x_{m+1} \ldots x_n],$$

выполняющемуся в $< A, [\ ] >$. По предложению 1 n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является m-полуабелевой. Предложение доказано.

Теорема 2. Если n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является производной от t-арной полугруппы $< A, (\ ) >$, то из полуабелевости $< A, (\ ) >$ следует полуабелевость $< A, [\ ] >$.

Доказательство. Так же, как и в теореме 1, $n = k(t-1) + 1$, где $k \geq 1$. Для любых $x_1, \ldots, x_n$ положим

$$\alpha_r = x_{(r-1)(t-1)+2} \ldots x_{r(t-1)},\ r = 1, \ldots, k.$$

Тогда, используя полуабелевость $< A, (\ ) >$, будем иметь

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n] = (x_1\alpha_1x_t\alpha_2x_{2(t-1)+1} \ldots \alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_n) =$$
$$= (x_t\alpha_1x_1\alpha_2x_{2(t-1)+1} \ldots \alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_n) =$$
$$= (x_t\alpha_1x_{2(t-1)+1}\alpha_2x_1 \ldots \alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_n) = \ldots = (x_t\alpha_1x_{2(t-1)+1}\alpha_2x_{3(t-1)+1} \ldots \alpha_{k-1}x_n\alpha_kx_1) =$$
$$= (x_t\alpha_1x_{2(t-1)+1}\alpha_2x_{3(t-1)+1} \ldots x_n\alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_1) = \ldots = (x_t\alpha_1x_n\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_1) =$$
$$= (x_n\alpha_1x_t\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}x_{(k-1)(t-1)+1}\alpha_kx_1) = [x_nx_2 \ldots x_{n-1}x_1],$$

то есть

$$[x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n] = [x_nx_2 \ldots x_{n-1}x_1].$$

Следовательно, $< A, [\ ] >$ – полуабелева. Предложение доказано.

Следствие 2. n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$, производная от полугруппы A с единицей, является полуабелевой тогда и только тогда, когда A абелева.

Теорема 3. Полуабелева n-арная группа с непустым m-полуцентром является m-полуабелевой.

Доказательство. Для элемента c из m-полуцентра Z(A, m) положим

$$\gamma = \underbrace{c \ldots c}_{m-2},\ \delta = \underbrace{c \ldots c}_{m-1}.$$

Ясно, что для любых $x, y \in A$ эквивалентны последовательности

$$x\underbrace{c \ldots c}_{m-1} \text{ и } \underbrace{c \ldots c}_{m-1}x\ (x\delta \sim \delta x)$$

и последовательности

$$y\underbrace{c\ldots c}_{m-1} \text{ и } \underbrace{c\ldots c}_{m-1}y \ (y\delta \sim \delta y).$$

Применяя к эквивалентным последовательностям $y\delta$ и δy лемму 1, получим

$$[x\gamma y\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}] = [x\gamma y\delta\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-2}] = [x\gamma\delta y\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-2}] = \ldots = [x\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}y],$$

то есть

$$[x\gamma y\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}] = [x\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}y]. \tag{4}$$

В полуабелевой n-арной группе $<A, [\,]>$ верно равенство

$$[x\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}y] = [y\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}x]. \tag{5}$$

Применяя к эквивалентным последовательностям $x\delta$ и δx лемму 1, получим

$$[y\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}x] = [y\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-2}\delta x] = [y\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-2}x\delta] = \ldots = [y\gamma x\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}],$$

то есть

$$[y\gamma\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}x] = [y\gamma x\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}]. \tag{6}$$

Из (4) – (6) следует

$$[x\gamma y\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}] = [y\gamma x\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-1}].$$

Следовательно, последовательности

$$x\gamma y = x\underbrace{c\ldots c}_{m-2}y,\ y\gamma x = y\underbrace{c\ldots c}_{m-2}x$$

эквивалентны. По лемме 2 $<A, [\,]>$ – m-полуабелева n-арная группа. Теорема доказана.

Следствие 3. [9] Полуабелева n-арная группа с непустым центром является абелевой.

Замечание. По аналогии с определением m-полуабелевой n-арной полугруппы можно ввести понятие m-полуцентра, в частности центра n-арной полугруппы, и получить аналоги теоремы 3 и следствия 3 для n-арных полугрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208-350.
2. ***Русаков, С.А.*** Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука i тэхнiка, 1992. – 245 с.
3. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1-19.
4. ***Гальмак, А.М.*** Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 128 с.
5. ***Гальмак, А.М.*** Абелевы n-арные группы и их обобщения / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1987. – Вып. 3. – С. 86-93.
6. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
7. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные аналоги центра группы / А.М. Гальмак // Препринт института прикладной оптики НАН Беларуси. – 2004. – № 16. – 35 с.

8. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
9. ***Дудек, В.А.*** m-Полуабелевые n-арные группы / В.А. Дудек // Изв. АН ССР Молдова. – Математика. – 1990. – № 2. – С. 66-70.

Поступила в редакцию 14.03.2008 г.