УДК 517.984

Н.Б. ЯБЛОНСКАЯ

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЛЯ ДЛЯ БРАУДЕРОВЫХ СУЩЕСТВЕННЫХ АППРОКСИМАТИВНЫХ СПЕКТРОВ

Статья посвящена получению аналогов классической теоремы Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра и браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра. Если для оператора T справедлива теорема Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра, то тогда для $\lambda \in \rho(T) \cup \pi_{00}(T)$, *найдется такой компактный оператор K, коммутирующий с T, что для оператора* $T + K - \lambda I$ *выполняется энергетическое неравенство, а если для оператора T справедлива теорема Вейля для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра, то тогда для* $\lambda \in \rho(T) \cup \pi_{00}(T)$, *найдется такой компактный оператор K, коммутирующий с T, что оператор* $T + K - \lambda I$ *сюрьективен. Приведены полные доказательства необходимых и достаточных условий выполнимости теоремы Вейля для полубраудеровых существенных спектров ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве.*

Настоящая работа посвящена получению аналогов классической теоремы Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра и браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра. Классический результат, доказанный Г. Вейлем, состоит в утверждении, что пересечение спектров ограниченного самосопряженного оператора T, возмущенного всеми компактными операторами K, то есть $\bigcap\limits_{K} \sigma(T+K)$, совпадает с множеством изолированных собственных значений конечной геометрической кратности $\pi_{00}(T)$ – множеством тех изолированных точек λ в спектре $\sigma(T)$, для которых $0<\dim N(T-\lambda I)<\infty$. Поскольку указанное пересечение спектров определяет *существенный спектр Вейля* $\sigma_{ew}(T)$, то теорему Вейля принято в современных обозначениях записывать в виде равенства

$$\sigma_{ew}(T)=\sigma(T)\setminus \pi_{00}(T). \tag{1}$$

Пусть T – ограниченный линейный оператор на комплексном банаховом пространстве X, т.е. $D(T)=X$ и $T\in \boldsymbol{B}(X)$. Для оператора T определим числовые характеристики: $\mathrm{nul}(T):=\dim N(T)$; $\mathrm{def}(T):=\mathrm{codim} R(T)=\dim X/R(T)$; $\mathrm{ind}(T):=\mathrm{def}(T)-\mathrm{nul}(T)$, $a(T)$ – *подъем* оператора T (наименьшее число $n\in \mathbf{Z}\cup\{0\}$ такое, что $N(T^n)=N(T^{n+1})$); $d(T)$ – *спуск* оператора T (наименьшее число $n\in \mathbf{Z}\cup\{0\}$ такое, что $R(T^n)=R(T^{n+1})$).

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости $\mathbf{C}$, определенные полуфредгольмовыми и полубраудеровыми характеристиками оператора $T-\lambda I$:

$$\Phi^{+}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ R(T-\lambda I)=\overline{R(T-\lambda I)},\ \mathrm{nul}(T-\lambda I)<\infty\};$$

$$\Phi^{-}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ R(T-\lambda I)=\overline{R(T-\lambda I)},\ \mathrm{def}(T-\lambda I)<\infty\};$$

$$s\text{-}\Phi(T):=\Phi^{+}(T)\cup\Phi^{-}(T);\quad \Phi(T):=\Phi^{+}(T)\cap\Phi^{-}(T);\quad \Phi_0(T):=\{\lambda\in\Phi(T):\ \mathrm{ind}(T-\lambda I)=0\};$$

$$B^{+}(T):=\{\lambda\in\Phi^{+}(T):\ a(T-\lambda I)<\infty\};\quad B^{-}(T):=\{\lambda\in\Phi^{-}(T):\ d(T-\lambda I)<\infty\};\quad B(T):=B^{+}(T)\cap B^{-}(T).$$

Дополнительная информация о свойствах полуфредгольмовых областей ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве содержится в [1]. Полубраудеровы множества определяют следующие существенные спектры: $\sigma_{ab}(T):=\mathbf{C}\backslash B^{+}(T)$ – *браудеров существенный аппроксимативно точечный спектр оператора T*; $\sigma_{db}(T):=\mathbf{C}\backslash B^{-}(T)$ – *браудеров существенный аппроксимативно дефектный спектр оператора T*; $\sigma_{eb}(T):=\mathbf{C}\backslash B(T)$ – *браудеров существенный спектр оператора T*. Спектры σ_{ab} и σ_{db}, порожденные полубраудеровыми операторами, называют также *полубраудеровыми существенными спектрами*.

Для доказательства основных теорем этой главы об аналогах теоремы Вейля для полубраудеровых существенных спектров понадобятся следующие вспомогательные леммы (см. [2], лемма 2.2 и лемма 2.3).

Лемма 1. *Пусть* M_1, M_2 *и* N *линейные подпространства линейного пространства X. Предположим, что* $\mathrm{M}_1\subset\mathrm{M}_2$. *Тогда*

$$\dim\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}_1\cap\mathrm{N}}\le\dim\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_2\cap\mathrm{N}}.$$

Говорят, что линейные пространства X_1 и X_2 изоморфны, если существует линейное взаимно однозначное отображение X_1 на X_2 и для изоморфных пространств X_1 и X_2 используется символ $X_1\cong X_2$.

Лемма 2. *Пусть* M *и* N *линейные подпространства линейного пространства* X. *Тогда*

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}\cap\mathrm{N}}\cong\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{\mathrm{N}}.$$

Для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра, поясняющего также название существенного спектра $\sigma_{ab}(T)$, В. Ракочевичем [3] получено следующее равенство:

$$\sigma_{ab}(T)=\bigcap_{\substack{TS=ST\\ S\in K(X)}}\sigma_a(T+S), \tag{2}$$

где $\sigma_a(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ \inf\{\,\|(T-\lambda I)x\|:\ \|x\|=1\}=0$ – *аппроксимативно точечный спектр* оператора *T*, другими словами, это множество тех λ, для которых оператор $T-\lambda I$ не имеет ограниченного обратного на $R(T-\lambda I)$.

Лемма 3. *Пусть* X_1 *и* X_2 *– линейные подпространства линейного пространства X, такие, что* $X_1\subset X_2$. *Тогда* $\dim X/X_1=\dim X/X_2+\dim X_2/X_1$. ([4], лемма 2.1).

Лемма 4. *Пусть Y и Z – линейные подпространства линейного пространства X, такие, что* $Y\cap Z=(0)$ и $\dim X/Z\le\dim Y<\infty$. Тогда $X=Y\oplus Z$. ([4], лемма 2.2).

Обозначим через $\pi_{00}^{alg}(T)$ – изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности, то есть $\lambda\in\pi_{00}^{alg}(T)$, если спектральный проектор $R_\lambda(T)$, соответствующий изолированной точке спектра $\lambda\in\sigma(T)$, конечного ранга. Алгебраическую кратность точки λ можно определить как $\dim N((T-\lambda I)^{a(T-\lambda I)})$, где $a(T-\lambda I)$ – подъем оператора $T-\lambda I$.

Определим *минимальный модуль* оператора T следующим образом:

$$\gamma(T) := \inf\{\|Tx\|/d(x,N(T)):\ x\in D(T),\ x\notin N(T)\},$$

где $d(x,N(T))$ – расстояние от x до нуль-пространства $N(T)$.

В следующей теореме сформулированы критерии совпадения множеств изолированных собственных значений конечной геометрической и алгебраической кратности ([5], теорема 2).

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство и ограниченный линейный оператор $T\in\boldsymbol{B}(X)$ – такой, что $\rho(T)\neq\varnothing$. Для равенства $\pi_{00}(T)=\pi_{00}^{alg}(T)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) *область значений $R(T-\lambda I)$ замкнута для всех $\lambda\in\pi_{00}(T)$;*
2) *минимальный модуль $\gamma(T-\lambda I)>0$ для любого $\lambda\in\pi_{00}(T)$;*
3) *минимальный модуль $\gamma(T-\lambda I)>0$ разрывен в каждом $\lambda\in\pi_{00}(T)$;*
4) *спуск $d(T-\lambda I)$ конечен для каждого $\lambda\in\pi_{00}(T)$;*
5) *каждое $\lambda\in\pi_{00}(T)$ – полюс резольвенты оператора T.*

Теорема 2. *Пусть X – банахово пространство и $T\in\boldsymbol{B}(X)$ – ограниченный линейный оператор. Для того, чтобы оператор удовлетворял теореме Вейля для браудерова существенного спектра оператора T, то есть чтобы*

$$\sigma_{eb}(T)=\sigma(T)\setminus\pi_{00}(T),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий 1-5 теоремы 1.

Доказательство. Следует из теоремы 1 [5] и предыдущей теоремы.

Перейдем к доказательству одной из основных теорем, содержащей необходимое и достаточное условие справедливости теоремы Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра. Часть результатов, полные доказательства которых приведены ниже, была анонсирована в работе [6].

Теорема 3. *Пусть X – банахово пространство и $T\in\boldsymbol{B}(X)$ – ограниченный линейный оператор. Для того чтобы оператор удовлетворял теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра оператора T, то есть чтобы*

$$\sigma_{ab}(T)=\sigma(T)\setminus\pi_{00}(T),$$

необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, выполнялось условие:

I. $\forall\lambda\in\sigma(T)\cap B^{+}(T)$ *справедливо* $\operatorname{def}(T-\lambda I)\le\operatorname{nul}(T-\lambda I)$

и, во-вторых, чтобы выполнялось одно из условий 1-5 теоремы 1.

Доказательство. Необходимо и достаточно показать, что $\sigma_{ab}(T)=\sigma_{eb}(T)$ и $\pi_{00}(T)=\pi_{00}^{alg}(T)$. Справедливость второго равенства следует из любого условия 1-5 теоремы 1.

Для справедливости первого равенства достаточно показать, что $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$ для соответствующих $\lambda\in B^{+}(T)$. Действительно, из теоремы 2.1 работы [7] и условия $\lambda\in\sigma(T)\cap B^{+}(T)$ по теореме IV.5.31 работы [8] и теореме 2.9 работы [7] $\lambda\in\pi_{00}^{alg}(T)$. Поэтому $\sigma(T)\cap B^{+}(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_{ab}(T)\subseteq\pi_{00}^{alg}(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_{eb}(T)$, то есть $\sigma_{ab}(T)=\sigma_{eb}(T)$. Обратно, $\forall\lambda\in\sigma(T)\cap B^{-}(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_{eb}(T)$ по определению $\sigma_{eb}(T)$ $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$.

Из работы [4] (теорема 4.5(a)) следует, что если $\operatorname{nul}(T-\lambda I)<\infty$, $p=a(T-\lambda I)<\infty$ и

$$\dim\frac{D((T-\lambda I)^{p})}{R(T-\lambda I)\cap D((T-\lambda I)^{p})}\le\operatorname{nul}(T-\lambda I),\tag{3}$$

то тогда подъем и спуск оператора $T-\lambda I$ равны $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$. В частности, если $D(T)=X$, то (3) эквивалентно неравенству $\mathrm{def}(T-\lambda I)\leq \mathrm{nul}(T-\lambda I)$.

Приведем подробное доказательство для общего случая, то есть покажем, что теорема справедлива и для замкнутых операторов, удовлетворяющих сформулированным в ней условиям. Так как $p=a(T-\lambda I)$, то $N(T-\lambda I)\cap R((T-\lambda I)^p)=\{0\}$ по лемме 3.4 работы [4]. Пусть $M_k=N(T-\lambda I)\cap R((T-\lambda I)^k)$, $k=0, 1, \ldots, p$. Тогда $M_k\subset M_{k-1}$, $M_0=N(T-\lambda I)$, $M_p=\{0\}$. Так как $M_k/M_p=M_k$, $k=0,1,\ldots,p-1$, то по лемме 3

$$\dim M_{k-1} = \dim M_{k-1}/M_k + \dim M_k, \quad k=1,2,\ldots,p. \tag{4}$$

Положим $m_k=\dim M_{k-1}/M_k$. Комбинируя равенства (4) при $k=1,2,\ldots,p-1$, получаем, что

$$\mathrm{nul}(T-\lambda I) = m_0+m_1+\ldots+m_{p-1}. \tag{5}$$

Для $0\leq k\leq p-1$ введем элементы $y_j^{(k)}\in M_k$, $1\leq j\leq m_k$, такие, что соответствующие классы элементов $[y_j^{(k)}]$, $1\leq j\leq m_k$, принадлежащие M_k/M_{k+1}, линейно независимы как элементы фактор-пространства. Тогда $y_j^{(k)}=(T-\lambda I)^k x_j^{(k)}$, где $x_j^{(k)}\in D((T-\lambda I)^k)$.

Элементам $x_j^{(k)}$, $1\leq j\leq m_k$, $0\leq k\leq p-1$, (их ровно $\mathrm{nul}(T-\lambda I)$ штук) соответствуют элементы $[x_j^{(k)}]$ фактор-пространства $X/R(T-\lambda I)$. Покажем, что последние линейно независимы. Линейную комбинацию можно записать в виде:

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\, x_j^{(i)} = (T-\lambda I)u \ \text{(элемент } R(T-\lambda I)\text{)}. \tag{6}$$

Пусть $w_i=\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\, x_j^{(i)}$, тогда $w_i\in D((T-\lambda I)^i)$ и

$$(T-\lambda I)^i w_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\, y_j^{(i)}\in M_i\subset N(T-\lambda I). \tag{7}$$

Так как $x_j^{(0)}=y_j^{(0)}\in N(T-\lambda I)$, то $w_0\in N(T-\lambda I)\in D(T-\lambda I)$. Перепишем (6) в виде

$$\sum_{i=0}^{p-1} w_i = (T-\lambda I)u. \tag{8}$$

Заметим, что каждое w_i, а следовательно и $(T-\lambda I)u$ принадлежат $D(T-\lambda I)$ и $\sum_{i=1}^{p-1}(T-\lambda I)w_i = (T-\lambda I)^2 u$. Поскольку $(T-\lambda I)^i w_i\in N(T-\lambda I)$, то, продолжая применять к равенству оператор $(T-\lambda I)$, получим: $(T-\lambda I)^{p-1}w_{p-1} = (T-\lambda I)^p u \in N(T-\lambda I)\cap R((T-\lambda I)^p)=\{0\}$, следовательно, $(T-\lambda I)^{p-1}w_{p-1}=0$. Тогда из (7) следует, что $c_{p-1,j}=0$, $j=1,\ldots,m_{p-1}$, а значит и $w_{p-1}=0$. Теперь из (8) получаем, $\sum_{i=0}^{p-2} w_i = (T-\lambda I)u$ и $(T-\lambda I)^{p-2}w_{p-2} = (T-\lambda I)^{p-1}u \in M_{p-1}$. Так как элементы $[y_j^{(p-2)}]$, $1\leq j\leq m_{p-2}$ линейно независимы, то из (7) следует: $c_{p-2,j}=0$, $j=1,\ldots,m_{p-2}$ и $w_{p-2}=0$. Рассуждая далее таким же образом получим равенство нулю всех $c_{i,j}$ для любых i и j.

По построению элементы $x_j^{(k)}\in N((T-\lambda I)^p)$, а элементы $[x_j^{(k)}]\in X/R(T-\lambda I)$ и линейно независимы. Пусть $M\subset X$ – подпространство, порожденное элементами

$x_j^{(k)}$, тогда $\mathrm{M}\cap R(T-\lambda I)=\{0\}$, $\dim\mathrm{M}=\mathrm{nul}(T-\lambda I)$. Тогда из (3) и леммы 4 следует, что $\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p}) = =[\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p})\cap R(T-\lambda I)]\oplus\mathrm{M}$. Далее из леммы 3.5 из 3 получаем, что $d(T-\lambda I)\le p$, а из теоремы 3.6 [4], что $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$.

Выполнение условия (3) следует из леммы 1 и условия I. Поскольку $\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p})\subset X$, то полагая в лемме 1 $\mathrm{M}_1=\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p})$, $\mathrm{M}_2=X$ и $\mathrm{N}=R(T-\lambda I)$, получим

$$\dim\frac{\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p})}{\mathrm{D}((T-\lambda I)^{p})\cap R(T-\lambda I)} \le \dim\frac{X}{R(T-\lambda I)} = \mathrm{def}(T-\lambda I).$$

Теорема доказана.

Если для оператора T справедлива теорема Вейля для браудерова существенного аппроксимативно точечного спектра $\sigma_{ab}(T)$, то тогда для $\lambda\in\rho(T)\cup\pi_{00}(T)$, найдется такой компактный оператор K, коммутирующий с T, что для оператора $T+K-\lambda I$ выполняется энергетическое неравенство, то есть существует такая константа $C > 0$, что справедливо неравенство ограниченности снизу $\|(T+K-\lambda I)x\|\ge C\|x\|$.

Для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра $\sigma_{db}(T)$, проясняющего также его название, имеет место аналог формулы (2) (см., например [3 , с. 135], следующего вида:

$$\sigma_{db}(T) = \bigcap_{\substack{TS=ST\\ S\in K(X)}} \sigma_{d}(T+S),$$

где $\sigma_d(T) = \{\lambda\in\mathbf{C}\colon R(T-\lambda I)\ne X\}$ – *аппроксимативно дефектный спектр* оператора T.

Теорема 4. *Пусть X – банахово пространство и $T\in\boldsymbol{B}(X)$ – ограниченный линейный оператор. Для того чтобы оператор удовлетворял теореме Вейля для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра оператора T, то есть чтобы*

$$\sigma_{db}(T) = \sigma(T)\setminus\pi_{00}(T),$$

необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, выполнялось условие:

II. $\forall\lambda\in\sigma(T)\cap B^{-}(T)$ *справедливо* $\mathrm{nul}(T-\lambda I)\le\mathrm{def}(T-\lambda I)$

и, во-вторых, чтобы выполнялось одно из условий 1-5 теоремы 1.

Доказательство. Необходимо и достаточно показать, что $\sigma_{db}(T)=\sigma_{eb}(T)$ и $\pi_{00}(T)=\pi_{00}^{alg}(T)$. Справедливость второго равенства следует из любого условия 1-5 теоремы 1.

Для справедливости первого равенства достаточно показать, что $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$ для соответствующих $\lambda\in B^{-}(T)$. Действительно, из теоремы 2.1 работы [7] и условия $\lambda\in\sigma(T)\cap B^{-}(T)$ по теореме IV.5.31 работы [8] и теореме 2.9 работы [7] $\lambda\in\pi_{00}^{alg}(T)$. Поэтому $\sigma(T)\cap B^{-}(T) = \sigma(T)\setminus\sigma_{db}(T)\subseteq\pi_{00}^{alg}(T) = \sigma(T)\setminus\sigma_{db}(T)$, то есть $\sigma_{db}(T)=\sigma_{eb}(T)$. Обратно, $\forall\lambda\in\sigma(T)\cap B^{-}(T) = \sigma(T)\setminus\sigma_{eb}(T)$ по определению $\sigma_{eb}(T)$ $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$.

Из работы [4] (теорема 4.5(b)) следует, что если $\mathrm{nul}(T-\lambda I)<\infty$, $q=d(T-\lambda I)<\infty$ и

$$\mathrm{nul}(T-\lambda I)\le\dim\frac{N((T-\lambda I)^{q})}{R(T-\lambda I)\cap N((T-\lambda I)^{q})}, \tag{9}$$

то тогда подъем и спуск оператора $T-\lambda I$ равны $a(T-\lambda I) = d(T-\lambda I)$.

Приведем подробное доказательство. Пусть $Q_i=N((T-\lambda I)^i)+R(T-\lambda I)$, $i=0,1,\ldots,q-1$, тогда $Q_i\subset Q_{i+1}$. Покажем, что

$$p_i = \dim N((T-\lambda I)^{i+1}) / [Q_i\cap N((T-\lambda I)^i)] < \infty. \qquad (10)$$

Пусть $x_j^{(i)}$, $1\le j\le n_i$, конечный набор элементов из $N((T-\lambda I)^{i+1})$ такой, что соответствующие элементы фактор-пространства $N((T-\lambda I)^{i+1})/[Q_i\cap N((T-\lambda I)^i)]$ линейно независимы. Покажем, что элементы фактор-пространства $X/R(T-\lambda I)$, соответствующие элементам $x_j^{(i)}$, $1\le j\le n_i$, $0\le i\le q-1$, линейно независимы и следовательно

$$n_0+n_1+\ldots+n_{q-1}\le \operatorname{def}(T-\lambda I). \qquad (11)$$

Рассмотрим линейную комбинацию $\sum\limits_{i=0}^{q-1}\sum\limits_{j=1}^{n_i} c_{ij}x_j^{(i)}\in R(T-\lambda I)$. В этом случае $\sum\limits_{j=1}^{n_{q-1}} c_{q-1,j}x_j^{(q-1)}\in N((T-\lambda I)^{q-1})+R(T-\lambda I)=Q_{q-1}$, и следовательно $c_{q-1,j}=0$ при $1\le j\le n_{q-1}$. Далее получаем $\sum\limits_{i=0}^{q-2}\sum\limits_{j=1}^{n_i} c_{ij}x_j^{(i)}\in R(T-\lambda I)$, $\sum\limits_{j=1}^{n_{q-2}} c_{q-2,j}x_j^{(q-2)}\in N((T-\lambda I)^{q-2})+R(T-\lambda I)=Q_{q-2}$, и таким образом $c_{q-2,j}=0$ при $1\le j\le n_{q-2}$. Продолжая данную процедуру, получаем $c_{ij}=0$ при любых i и j, и поэтому справедливо соотношение (11).

Пусть теперь $y_j^{(i)}=T^i x_j^{(i)}$, тогда $y_j^{(i)}\in N(T-\lambda I)$. Покажем, что $y_j^{(i)}$ линейно независимы и, следовательно,

$$n_0+n_1+\ldots+n_{q-1}\le \operatorname{nul}(T-\lambda I). \qquad (12)$$

Фактически мы покажем большее:

$$n_0+n_1+\ldots+n_{q-1}\le \dim N(T-\lambda I) / [R((T-\lambda I)^q)\cap N(T-\lambda I)]. \qquad (13)$$

Отметим, что $y_j^{(0)}=x_j^{(0)}$, и что $x_j^{(0)}$, $1\le j\le n_0$, элементы из $N(T-\lambda I)$, выбранные так, что если $\sum\limits_{j=1}^{n_0} a_j x_j^{(0)}\in Q_0=R(T-\lambda I)$, то $a_j=0$ для любого j.

Рассмотрим следующее утверждение P_m:

Если $\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ij}y_j^{(i)}\in R((T-\lambda I)^m)$ при фиксированном m (где $1\le m\le q$), то каждое $a_{ij}=0$.

Для $m=1$ это верно. Покажем по индукции, что утверждение P_{m+1} истинно, если истинно P_m и $m\le q-1$, и следовательно будет истинно P_q.

Предположим, что утверждение P_m верно, и $\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ij}y_j^{(i)}\in(T-\lambda I)^{m+1}u$. Поэтому $\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=1}^{n_i} a_{ij}y_j^{(i)}=(T-\lambda I)^{m+1}u-\sum\limits_{j=1}^{n_m} a_{mj}(T-\lambda I)^m x_j^{(m)}\in R((T-\lambda I)^m)$ и таким образом $a_{ij}=0$ для $0\le i\le m-1$. Но тогда $(T-\lambda I)^{m+1}u = \sum_{j=1}^{n_m} a_{mj}\,(T-\lambda I)^m x_j^{(m)}$. Пусть $x=\sum_{j=1}^{n_m} a_{mj}\,x_j^{(m)} - (T-\lambda I)u$. Заметим, что $(T-\lambda I)^{m+1}x=0$. Тогда $\sum_{j=1}^{n_m} a_{mj}\,x_j^{(m)} = x + (T-\lambda I)u \in N((T-\lambda I)^m)+R(T-\lambda I)=Q_m$. Из того, как мы определили элементы $x_j^{(m)}$, следует, что $a_{mj}=0$ для любого j. Таким образом утверждение P_q истинно, а значит истинно (13) и (12).

По условию теоремы $\mathrm{def}(T-\lambda I)<\infty$, поэтому (10) истинно для любого i ($n_i\le p_i$).

Мы также показали, что $p_0+p_1+\ldots+p_{q-1} \le \dim N(T-\lambda I)\ /\ [R((T-\lambda I)^q)\cap N(T-\lambda I)]$. Докажем, что на самом деле

$$p_0+p_1+\ldots+p_{q-1} = \dim N((T-\lambda I)^q)\ /\ [R(T-\lambda I)\cap N((T-\lambda I)^q)]. \qquad (14)$$

Все элементы $x_j^{(i)}\in N((T-\lambda I)^q)$. Используя тот же метод, что и для доказательства формулы (11) получаем неравенство: $p_0+p_1+\ldots+p_{q-1} \le \dim N((T-\lambda I)^q)\ /\ [R(T-\lambda I)\cap N((T-\lambda I)^q)]$.

Отметим, что любой элемент из $N((T-\lambda I)^{i+1})$ представляется в виде линейной комбинации $x_j^{(i)}$, $1\le j\le p_i$, плюс элемент из Q_i. Вспоминая, что $Q_i=N((T-\lambda I)^i)+R(T-\lambda I)$ и повторяя то же рассуждение для $i=q-1,q-2,\ldots,0$, получим, что элемент $x\in N((T-\lambda I)^q)$ представляется в виде $x=\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=1}^{p_i} a_{ij}\,x_j^{(i)}+w$, где $w\in R(T-\lambda I)$.

Это доказывает, что $p_0+p_1+\ldots+p_{q-1} \ge \dim N((T-\lambda I)^q)\ /\ [R(T-\lambda I)\cap N((T-\lambda I)^q)]$.

Ранее мы ввели элементы $y_j^{(i)}=T^i x_j^{(i)}$, $y_j^{(i)}\in N(T-\lambda I)$ ($i=0,\ldots,q-1$, $j=1,\ldots,p_i$). Всего таких элементов $p_0+p_1+\ldots+p_{q-1}$. Мы также показали, что если линейная комбинация этих элементов принадлежит $R((T-\lambda I)^q)$, то все коэффициенты в ней равны нулю. Из (9) и (14) следует, что линейная оболочка, порожденная элементами $y_j^{(i)}$ есть $N(T-\lambda I)$, кроме того $N(T-\lambda I)\cap R((T-\lambda I)^q)=\{0\}$. Далее из леммы 3.4 работы [4] получаем, что $a(T-\lambda I)\le q$, а из леммы 3.6 работы [4], что $a(T-\lambda I)=d(T-\lambda I)$.

Из лемм 1 и 2 и условия II следует справедливость равенства (9). Поскольку оператор T ограничен и определен на всем X, то $D(T-\lambda I)=X$ и $D((T-\lambda I)^q)=X$, поэтому для банахова пространства X справедливо представление $X = R(T-\lambda I)\oplus Y$, где подпространство $Y\subset N((T-\lambda I)^q)$ (лемма 3.5 работы [4]). Поэтому, для $N=R(T-\lambda I)$ и $M=Y$ в лемме 2, используя затем лемму 1, имеем

$$\mathrm{def}(T-\lambda I) = \dim\frac{X}{R(T-\lambda I)} = \dim\frac{R(T-\lambda I)+Y}{R(T-\lambda I)} =$$

$$= \dim\frac{Y}{Y\cap R(T-\lambda I)} \le \dim\frac{N((T-\lambda I)^q)}{N((T-\lambda I)^q)\cap R(T-\lambda I)}.$$

Теорема доказана.

Если для оператора T справедлива теорема Вейля для браудерова существенного аппроксимативно дефектного спектра $\sigma_{db}(T)$, то тогда для $\lambda \in \rho(T) \cup \pi_{00}(T)$, найдется такой компактный оператор K, коммутирующий с T, что оператор $T+K-\lambda I$ сюрьективен, то есть операторное уравнение $(T+K-\lambda I)x=y$ разрешимо для любой правой части этого уравнения.

Можно также отметить работу [9], которая посвящена тематике данной статьи. В ней доказана устойчивость существенного спектра Апостола относительно компактных и строго сингулярных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Еровенко, В.А.*** Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах: Пособие для студентов-математиков / В.А. Еровенко, Н.Б. Северенчук (Яблонская). – Мн.: БГУ, 2000. – 135 с.
2. ***Kaashoek, M.A.*** Ascent, descent, nullity and defect, a note on a paper by A.E. Taylor / M.A. Kaashoek // Math. Annalen. – 1967. – Vol. 172. – P. 105-115.
3. ***Rakočević, V.*** Semi-Browder operators and perturbations / V. Rakočević // Studia Math. – 1997. – Vol. 122. – № 2. – P. 131-137.
4. ***Taylor, A.E.*** Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators / A.E. Taylor // Math. Annalen. – 1966. – Vol. 163. – P. 18-49.
5. ***Еровенко, В.А.*** О теореме Вейля для существенных спектров Като и Фредгольма замкнутых операторов в банаховом пространстве / В.А. Еровенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 1. – С. 18-23.
6. ***Еровенко, В.А.*** Теорема Вейля и полубраудеровы существенные спектры / В.А. Еровенко, Н.Б. Северенчук (Яблонская) // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45. – № 1. – С. 29-33.
7. ***Lay, D.C.*** Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect / D.C. Lay // Math. Annalen. – 1970. – Vol. 184. – P. 197-214.
8. ***Като, Т.*** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
9. ***Еровенко, В.А.*** Свойства существенно полурегулярных операторов и соответствующего спектра Апостола / В.А. Еровенко, М.В. Мартон // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Том 48. – № 6. – С. 16-20.

Поступила в редакцию 28.02.2008 г.