УДК 530.1, 539.1

А.Б. СОТСКИЙ

ФОРМУЛА НАЙКВИСТА ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Представлена методика расчета спектральной плотности тепловой ЭДС, генерируемой резистором, включенным в колебательный контур, основанная на рассмотрении канонического распределения Гиббса и теоремы Винера-Хинчина.

Формула Найквиста, дающая количественную оценку ЭДС тепловых шумов в резисторе, находящемся в термодинамическом равновесии с окружающей средой, играет важную роль в экспериментальной физике. В классических учебниках по статистической физике дается полукачественный вывод этой формулы, основанный на достаточно специализированных моделях двухпроводных линий [1-3], либо броуновских частиц [4]. При этом доказательство справедливости формулы Найквиста вне зависимости от конкретных параметров электрической схемы, содержащей резистор, не приводится. Вместе с тем, согласно современной учебной программе по термодинамике и статистической физике для университетов, формула Найквиста требует строгого обоснования с привлечением теоремы Винера-Хинчина.

Методика такого обоснования является предметом настоящего сообщения. Здесь рассмотрен расчет спектральной плотности тепловой ЭДС, генерируемой резистором, включенным в колебательный контур, с последующим выводом формулы Найквиста. Показана независимость результата от параметров контура.

Рассмотрим колебательный контур с эквивалентной схемой, представленной на рисунке. Здесь под $e(t)$ понимается тепловая ЭДС, являющаяся случайной функцией времени. Ее возникновение объясняется столкновениями электронов с атомами кристаллической решетки резистора, совершающими тепловые колебания [5]. Если вследствие таких столкновений возникает направленное коллективное движение электронов, то в резисторе происходит пространственное разделение заряда, приводящее к появлению разности потенциалов на концах резистора.

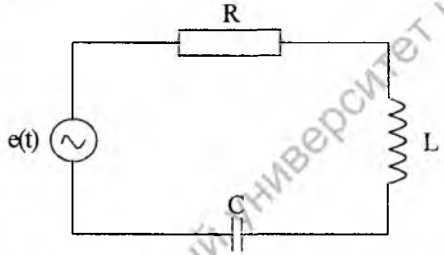

Рис. Колебательный контур с резистором R, индуктивностью L и емкостью C; e(t) – тепловая ЭДС

В дальнейшем процесс $e(t)$ будем предполагать стационарным, эргодическим и с нулевым математическим ожиданием.

Примем статистическую модель колебательного контура, в которой динамическими переменными являются ток в контуре $i(t)$ и напряжение на конденсаторе $u(t)$. Будем считать, что контур находится в тепловом равновесии с окружающей средой (термостатом с температурой T).

Рассчитаем вначале дисперсию напряжения на конденсаторе $D(u)$. Согласно эргодической гипотезе [4], значение $D(u)$ может быть найдено усреднением u^2 по каноническому распределению Гиббса. Чтобы воспользоваться этим распределением, колебательному контуру следует сопоставить некоторый гамильтониан, записанный без учета взаимодействия контура с термостатом, т.е. при сопротивлении резистора $R = 0$ (согласно описанной выше модели взаимодействие колебательного контура с термостатом осуществляется через резистор).

Введем в рассмотрение канонические “координату” q и “импульс” p, определив их по правилу

$$q = uC, \quad p = iL. \tag{1}$$

Тогда искомым гамильтонианом будет энергия электромагнитного поля, запасенная в колебательном контуре

$$H(p,q) = 0.5(p^2 L^{-1} + q^2 C^{-1}). \tag{2}$$

Действительно, при записи (2) уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{dq}{dt},\quad \frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{dp}{dt}$$

совпадают с известными динамическими уравнениями колебательного контура при нулевом сопротивлении резистора

$$i=C\frac{du}{dt},\quad u=-L\frac{di}{dt}.$$

Применив к гамильтониану (2) теорему о вириале [4], имеем

$$\overline{q\frac{\partial H}{\partial q}}=kT, \tag{3}$$

где черта означает усреднение по каноническому распределению Гиббса, k – постоянная Больцмана. Следовательно, в соответствии с (3) и определением (1),

$$D(u)=\overline{u^2}=kTC^{-1}. \tag{4}$$

На первый взгляд, выражение (4) не содержит какой-либо информации о причине флуктуаций напряжения, т.е. о тепловой ЭДС $e(t)$. Тем не менее, данное выражение может быть использовано для вывода формулы Найквиста.

В самом деле, случайные функции времени $e(t)$ и $u(t)$ связаны известным уравнением колебательного контура

$$e=u+RC\frac{du}{dt}+LC\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{5}$$

Подставив в (5) интегралы Фурье

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ u(t) \end{pmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\, t)\begin{pmatrix} \hat{e}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}d\omega, \tag{6}$$

после элементарных преобразований находим

$$\hat{u}(\omega)=\hat{e}(\omega)G(\omega), \tag{7}$$

где

$$G(\omega)=(1-\omega^2LC+i\omega RC)^{-1}. \tag{8}$$

Согласно (6) и (7),

$$<u^2>=<\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega_1 t)G(\omega_1)\hat{e}(\omega_1)d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega_2 t)G(\omega_2)\hat{e}(\omega_2)d\omega_2>, \tag{9}$$

где скобки <...> означают усреднение величин по времени. Учитывая эргодическую гипотезу, а также эргодичность процесса $e(t)$, заменяем выражение (9) на

$$D(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1 d\omega_2 G(\omega_1)G(\omega_2)\exp[i(\omega_1+\omega_2)t]\overline{\hat{e}(\omega_1)\hat{e}(\omega_2)}, \tag{10}$$

где черта означает усреднение по ансамблю процессов $e(t)$. Выполнив в (6) обратное преобразование Фурье и подставив результат в (10), имеем

$$D(u)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1 d\omega_2 G(\omega_1)G(\omega_2)\exp[i(\omega_1+\omega_2)t]I(\omega_1,\omega_2), \tag{11}$$

где

$$I(\omega_1,\omega_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1dt_2\exp[-i(\omega_1t_1+\omega_2t_2)]\overline{e(t_1)e(t_2)}\,. \qquad (12)$$

После перехода к переменной интегрирования $\tau=t_1-t_2$ интеграл (12) приобретает вид

$$I(\omega_1,\omega_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1d\tau\exp[-i(\omega_1+\omega_2)t_1+i\omega_2\tau]\rho(\tau)\,, \qquad (13)$$

где $\rho(\tau)=\overline{e(t_1)e(t_1-\tau)}$ – автокорреляционная функция случайного процесса $e(t)$ (в силу стационарности процесса $e(t)$ данная функция не зависит от момента времени t_1 и является симметричной: $\rho(-\tau)=\rho(\tau)$ [6]). Определив по формуле Винера-Хинчина [7]

$$\hat{\rho}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\tau)\rho(\tau)d\tau \qquad (14)$$

спектральную плотность $\hat{\rho}(\omega)$ процесса $e(t)$, воспользовавшись в (13) соотношением ортогональности для экспонент

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\omega_1+\omega_2)t]dt=2\pi\delta(\omega_1+\omega_2)$$

($\delta(\omega_1+\omega_2)$ – дельта-функция Дирака), затем выполнив в (11) интегрирование по частоте ω_2 и приняв во внимание, что в соответствии с определением (8) и четностью функции $\rho(\tau)$

$$G(-\omega)=G^*(\omega)\,,\quad \hat{\rho}(-\omega)=\hat{\rho}(\omega)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение), приходим к соотношению

$$D(u)=\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2\hat{\rho}(\omega)d\omega\,, \qquad (15)$$

где

$$|G(\omega)|^2=[(1-\omega^2LC)^2+(\omega RC)^2]^{-1}. \qquad (16)$$

Следует отметить, что результат (15) представляет собой частный случай теоремы Винера-Хинчина [6], согласно которой дисперсия напряжения $D(u)$ на выходе произвольного линейного фильтра связана со спектральной плотностью напряжения $\hat{\rho}(\omega)$ на входе фильтра формулой

$$D(u)=2\int_{0}^{\infty}|G(\omega)|^2\,\hat{\rho}(\omega)d\omega\,, \qquad (17)$$

где под $G(\omega)$ понимается частотная характеристика фильтра (в общем случае она может отличаться от функции (8)).

Как известно [5], случайный процесс $e(t)$ имеет весьма короткую память, длительность которой τ_m сравнима со средним периодом тепловых колебаний кристаллической решетки резистора (при нормальных условиях $\tau_m\sim10^{-12}c$ [5]). Поскольку автокорреляционная функция $\rho(\tau)$, по своему физическому смыслу, заметно отличается от нуля при $\tau\le\tau_m$, в соответствии с определением (14) можно считать, что $\hat{\rho}(\omega)=\hat{\rho}(0)$ в диапазоне частот

$$|\omega| << \omega_m = 2\pi\tau_m^{-1}. \qquad (18)$$

С другой стороны, рабочие частоты реальных колебательных контуров, при которых функция $|G(\omega)|^2$ вида (16) заметно отличается от нуля, также находятся в диапазоне (18). В такой ситуации функцию $\hat{\rho}(\omega)$ в (15) можно положить равной $\hat{\rho}(0)$ и вынести из-под интеграла. Тогда

$$D(u) = \frac{\hat{\rho}(0)}{RC} J(\alpha), \qquad (19)$$

где

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1-\alpha x^2)^2 + x^2}, \quad \alpha = \frac{L}{CR^2}.$$

Вычисление интеграла $J(\alpha)$ по теореме о вычетах при любых $\alpha \geq 0$ приводит к результату

$$J(\alpha) = \pi. \qquad (20)$$

Таким образом, согласно (4), (19) и (20),

$$\hat{\rho}(0) = kTR\pi^{-1}. \qquad (21)$$

Выражение (21) означает, что в представляющем практический интерес диапазоне частот (18) спектральная плотность тепловой ЭДС определяется только температурой термостата и сопротивлением резистора, вне зависимости от индуктивности и емкости колебательного контура. Иными словами, колебательный контур можно рассматривать как измерительный прибор для регистрации характеристик существующего независимо от этого прибора случайного процесса $e(t)$.

Предположим теперь, что с целью исследования тепловой ЭДС мы подключили резистор ко входу идеального фильтра с ступенчатой частотной характеристикой [1]. Тогда дисперсия напряжения, измеряемого на выходе фильтра, может быть рассчитана по формуле (17), где

$$|G(\omega)|^2 = \begin{cases} 1 & при \quad \omega < \Delta\omega \\ 0 & при \quad \omega > \Delta\omega \end{cases},$$

$\Delta\omega$ – ширина полосы пропускания фильтра, удовлетворяющая условию $\Delta\omega << 2\pi\tau_m^{-1}$. Вычисляя интеграл в (17) при $\hat{\rho}(\omega)=\hat{\rho}(0)$ и учитывая (21), приходим к формуле Найквиста [1]

$$D(u) = 2kTR\pi^{-1}\Delta\omega. \qquad (22)$$

Итак, статистические характеристики (21) и (22) тепловой ЭДС, генерируемой резистором, получены как строгие следствия канонического распределения Гиббса и теоремы Винера-Хинчина, примененных к колебательному контуру. Представленный материал может служить методической основой для вывода формулы Найквиста в курсе лекций по термодинамике и статистической физике.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Киттель, Ч.*** Статистическая термодинамика / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1977. – 336 с.

2. ***Левич, В.Г.*** Введение в статистическую физику / В.Г. Левич. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 528 с.
3. ***Квасников, И.А.*** Термодинамика и статистическая физика. Т. 2 / И.А. Квасников. – М.:УРСС, 2002. – 429 с.
4. ***Терлецкий, Я.П.*** Статистическая физика / Я.П. Терлецкий. – М.: Высшая школа, 1966. – 235 с.
5. ***Васильев, А.М.*** Введение в статистическую физику / А.М. Васильев. – М.: Высшая школа, 1980. – 271 с.
6. ***Анго, А.*** Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
7. ***Бендат, Дж.*** Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

Поступила в редакцию 09.04.2008 г.