ГРУППОВОЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Марченко
БИП-Институт правоведения, г. Могилев

Одним из основных методов решения функциональных уравнений является метод подстановки. Этот метод, с одной стороны, позволяет решить функциональное уравнение без таких существенных ограничений на искомую функцию, как, например, монотонность, непрерывность, дифференцируемость и другие, а, с другой, является достаточно элементарным.

Метод подстановки имеет очень широкий диапазон использования, который во многом зависит от структуры уравнений.

Этот метод состоит в замене независимой переменной функциональных уравнениях некоторой функцией новой независимой переменной. В результате получается новое уравнение относительно неизвестной функции. Часто делается несколько таких подстановок и приходится решать систему уравнений относительно неизвестной функции $f(x)$.

При рассмотрении вопроса поиска подходящей подстановки часто не упоминают о том, что функции-замены во многих случаях образуют группу по операции композиции. За основу выбора подстановки указывается обратимость, наличие функциональных связей вида $\varphi(x)=-\psi(x)$, $\varphi(-x)=\psi(x)$ и т.д. [1]. Это позволяет рассмотреть лишь ограниченное число задач, скрывает общие принципы поиска подстановок, что на начальных стадиях изучения методов решения функциональных уравнений может дать низкий уровень их усвояемости.

При изложении группового подхода к поиску подстановок будем использовать понятие группы. Под группой понимают множество элементов с введенной на нем алгебраической операцией, обладающей свойствами ассоциативности, наличия единичного и обратного элементов. При определении наличия группы по операции композиции (умножения) для конечного множества функций g_1, g_2, g_3, g_4 удобно использовать табличный способ задания групп. Так, например, для множества функций g_1, g_2, g_3, g_4 образующих группу, такая таблица будет иметь следующий вид (таблица 1).

Таблица 1

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Как видим, отличительной чертой этой таблицы является то, что в каждой строке и в каждом столбце ее будут находиться все элементы группы в некотором порядке. По этой таблицы легко найти единичный и обратный элементы группы, убедиться в ассоциативности операции. Проверка на наличие группы функций по операции композиции наиболее удобна при поиске подстановок для функционального уравнения. Кроме того, она позволяет использовать возможности математических пакетов (Maple, Mathematica).

Групповой подход [2] к поиску подстановок предполагает следующее.

Будем рассматривать функциональное уравнение вида

$$a_1 f(g_1(x)) + a_2 f(g_2(x)) + \ldots + a_n f(g_n(x)) = b, \qquad (1)$$

где a_1, a_2, …, a_n, b, вообще говоря, являются некоторыми функциями переменной x, а функции g_1, g_2, g_3, g_4, которые есть аргументы искомой функции f, образуют конечную группу порядка n относительно операции композиции функций.

Предположим, для определенности, что $g_1(x)=x$. Тогда, заменяя g_2 на x, приходим к тому, что все элементы группы оказываются умноженными на функцию g_2, выражения g_1, g_2, g_3, g_4 перейдут соответственно в выражения $g_2 \circ g_1, g_2 \circ g_2, \ldots, g_2 \circ g_n$. Они составляют все элементы группы.

Таким образом, путем выполненной замены уравнение (1) перешло в новое уравнение относительно тех же неизвестных $f(g_1(x)), f(g_2(x)), \ldots, f(g_n(x))$.

Далее, производя последовательно замены $x \to g_3(x)$, $x \to g_4(x)$, …, $x \to g_n(x)$, приходим к системе n линейных уравнений относительно n неизвестных. Теперь вопрос решения функционального уравнения сводится к решению этой системы. Если она разрешима, то задача решена и можно определить искомую функцию $f(g_1(x))=f(x)$. Затем непосредственной проверкой следует убедиться, что эта функция действительно является решением данного уравнения.

Следует отметить, что использование группового свойства функций при решении функциональных уравнений может привести к ограничению области определения неизвестной функции. Это связано с тем, что при решении требуется исключать те значения независимой переменной, при которых элементы группы не имеют смысл.

Рассмотрим пример, который предполагает решение именно методом подстановки.

Решим функциональное уравнение

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f(x)=x^2 \cdot$$

Аргументы $g_1(x)=x$, $g_2(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $g_3=-\frac{1}{x}$ искомой функции f группу не образуют, поскольку результатом композиции функций g_2 и g_3 является функция $g_4(x)=\frac{x+1}{1-x}$. Нетрудно убедиться, что функции g_1, g_2, g_3, g_4 образуют группу по операции композиции. Заменим в исходном уравнении g_1 сначала на g_2, а потом на g_3. Добавив к полученным уравнениям исходное, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} f(g_2)+f(g_3)+f(g_1)=x^2, \\ f(g_3)+f(g_4)+f(g_2)=g_2^2, \\ f(g_4)+f(g_1)+f(g_3)=g_3^2. \end{cases}$$

Решением этой системы является функция

$$f(x)=f(g_1)=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что она будет решением исходного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихтарников, Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л. М. Лихтарников. – Санкт-Петербург : Лань, 1997. – 160 с.

2. Бродский, Я.С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – Киев : Вища школа, 1983. – 96 с.