УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, Г.Е. БОРИСОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В работе исследуются системы связанных уравнений Клейна-Гордона вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = k_i u_i + \left\{ \sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)} \ln\left[b_j^2 u_j^2\right] \right\} u_i, \qquad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = k_i u_i + a_i \ln\left\{ \sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} u_j^2 \right\} u_i, \qquad i = 1, 2,$$

с произвольными действительными коэффициентами. Они расширяют классы интегрируемых систем типа Клейна-Гордона и могут конкурировать с аналогичными системами уравнений Шредингера. Построены солитонные решения этих систем в форме бегущих волн Гаусса. Получены необходимые и достаточные условия существования солитонов, которые связывают параметры солитонов с параметрами среды. С физической точки зрения эти условия представляют собой законы распространения солитонов. Поэтому они представляют интерес для нелинейной оптики и лазерной физики.

Введение

Волновые уравнения Клейна-Гордона [1-8] составляют важный класс нелинейных уравнений современной физики. Это связано в первую очередь с наличием солитонных решений для классических уравнений sin-Gordon и Буссинеска. Поэтому в настоящее время ведется активный поиск солитоноподобных решений уравнений Клейна-Гордона с различными типами нелинейностей [9; 10]. В настоящей работе исследования проводятся на основе метода из [6], который является развитием и обобщением классического метода Эйлера для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

I. Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона с логарифмическим законом нелинейности

$$u_{tt} - u_{xx} = pu + q\ln\left(b^2 u^2\right) u, \tag{1}$$

где $b > 0,\ p, q -$ произвольные действительные числа. Солитонное решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t,x) = v(\xi), \qquad \xi \equiv \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \varphi -$ произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), получим

$$v''\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = pv + 2q\ln(bv)v,$$

где $v(\xi)$ – искомая неотрицательная функция, или

$$v'' = \varepsilon v - \gamma \ln(bv)v, \tag{3}$$

$$\varepsilon = \frac{p}{\alpha^2 - \beta^2}, \qquad \gamma = \frac{2q}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

К уравнению (3) добавим краевые условия

$$v|_{\xi \to \pm\infty} = 0, \qquad v'|_{\xi \to \pm\infty} = 0. \tag{4}$$

Задача (3), (4) определяет существование солитонного решения уравнения (1). Для ее решения обозначим $v' = z$. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dv} z = \varepsilon v - \gamma \ln(bv)v. \tag{5}$$

Разделяя переменные в уравнении (5), получим первый интеграл

$$z^2 = hv^2 - \gamma v^2 \ln(bv), \qquad h \equiv \varepsilon + \frac{\gamma}{2}, \tag{6}$$

в котором учтены краевые условия (4). Из (6) находим

$$\frac{dv}{d\xi} = -\left[hv^2 - \gamma v^2 \ln(bv)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

где знак "–" указывает на убывание солитона на бесконечности. Интегрируя уравнение (7), получим

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{h - \gamma \ln(bv)}} = -\xi + \xi_0, \tag{8}$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Чтобы вычислить этот интеграл, сделаем замену переменной

$$h - \gamma \ln(bv) = s^2,$$

где s – новая переменная. В результате элементарных вычислений получим

$$v(\xi) = \frac{1}{b} \exp\left\{\frac{h}{\gamma} - \frac{\gamma}{4}(\xi - \xi_0)^2\right\},$$

где параметр $\gamma > 0$, или

$$v(\xi) = \frac{\exp\left(\frac{h}{\gamma}\right)}{be}, \qquad e \equiv \exp\left\{\frac{\gamma}{4}(\xi - \xi_0)^2\right\}. \tag{9}$$

Решение (9) имеет дробно-рациональную форму по переменной e. Поэтому к задаче (3), (4) можно применить метод, развитый в монографии [6]. В частности, для задачи (3), (4) на его основе устанавливается следующая

Теорема 1. *Для того чтобы задача (3), (4) имела решение вида*

$$v(\xi) = A\exp\left(-\lambda\xi^2\right), \ \lambda > 0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$\lambda = \frac{1}{4}\gamma, \qquad A = \frac{1}{b}\exp\left\{\frac{h}{\gamma}\right\}. \tag{11}$$

Соотношения (11) дают полную и исчерпывающую информацию о распространении солитонов вида (10).

II. На основе полученных результатов и метода из [6] исследуем систему связанных уравнений Клейна-Гордона вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = k_i u_i + \left\{\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)} \ln\left[b_j^2 u_j^2\right]\right\} u_i, \qquad i = 1, 2, \tag{12}$$

где $k_i, a_j^{(i)}, b_j > 0,\ j = 1, 2 -$ произвольные действительные числа. Решение системы (12) будем строить в виде

$$u_i(t, x) = v_i(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \qquad i = 1, 2. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$v_i''\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = k_i v_i + \left\{\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)} \ln\left[b_j^2 v_j^2\right]\right\} v_i, \qquad i = 1, 2. \tag{14}$$

Решение системы (14) строится в виде

$$v_i(\xi) = A_i \exp\left(-\mu\xi^2\right), \qquad i = 1, 2, \tag{15}$$

где $\mu > 0,\ A_i -$ искомые параметры солитонов. Подставляя (15) в (14), найдем

$$\left(-2\mu + 4\mu^2\xi^2\right)d = k_i + 2\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)} \ln\left(b_j A_j e^{-\mu\xi^2}\right)_i, \quad d \equiv \alpha^2 - \beta^2. \tag{16}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, из (16) получим

$$2\mu d = -\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)}, \qquad -2\mu d = k_i + 2\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)}\left[\ln\left(b_j A_j\right)\right]. \tag{17}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система (14) имела решение вида (15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (17).*

Изучим эти соотношения. Очевидно, что должны выполняться равенства

$$\sum_{j=1}^{2} a_j^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} a_j^{(2)} \equiv \delta.$$

Тогда параметр μ определяется формулой

$$\mu = -\frac{\delta}{2d} > 0,$$

которая накладывает ограничения на коэффициенты системы (12) и параметры α, β. Второе дисперсионное соотношение (17) представляет собой линейную систему относительно неизвестных параметров

$$X_j \equiv \ln(b_j A_j), \qquad j = 1, 2,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{2} a_j^{(i)} X_j = \frac{1}{2}(\delta - k_i), \qquad i = 1, 2. \tag{18}$$

Система (18) исследуется на основе теоремы Кронекера-Капелли. В частности, если

$$\det a_j^{(i)} \neq 0,$$

то система (18) имеет единственное решение. В этом случае амплитуды солитонов определяются по формулам

$$A_j = b_j^{-1} \exp X_j, \qquad j = 1, 2.$$

Таким образом, исследование системы (12) сводится к исследованию линейной алгебраической системы (18).

III. Рассмотрим систему связанных уравнений Клейна-Гордона вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = k_i u_i + a_i \ln\left[\sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} u_j^2\right] u_i, \qquad i = 1, 2, \tag{19}$$

где k_i, a_i, $b_j^{(i)}$ – произвольные действительные числа. Решение системы (19) будем строить в виде

$$u_i(t, x) = v_i(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \qquad i = 1, 2. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$v_i''\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = k_i v_i + a_i \ln\left[\sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} v_j^2\right] v_i, \qquad i = 1, 2. \tag{21}$$

Решение системы (21) строится в виде

$$v_i(\xi) = A_i \exp(-\mu \xi^2), \qquad i = 1, 2, \tag{22}$$

где $\mu > 0$, A_i – искомые параметры солитонов. Подставляя (22) в (21), найдем

$$\left(-2\mu + 4\mu^2 \xi^2\right) d = k_i + a_i \ln\left[\sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} A_j^2 e^{-2\mu\xi^2}\right], \qquad d = \alpha^2 - \beta^2. \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, из (23) получим

$$2\mu d = -a_i, \qquad -2\mu d = k_i + a_i \ln\left[\sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} A_j^2\right], \qquad i = 1, 2. \tag{24}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы система (21) имела решение вида (22) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (24).*

Изучим эти соотношения. Очевидно, что коэффициенты a_1, a_2 должны быть равны т.е. $a_1 = a_2 = a$. Тогда

$$\mu = -\frac{a}{2d} > 0.$$

Это неравенство накладывает ограничения на коэффициенты системы (19) и параметры α, β. Второе дисперсионное соотношение (24) представляет собой линейную алгебраическую систему относительно неизвестных параметров

$$Y_j \equiv A_j^2, \qquad j = 1,2,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{2} b_j^{(i)} Y_j = \exp\left\{1 - \frac{k_i}{a}\right\}, \qquad i = 1,2. \tag{25}$$

Система (25) исследуется на основе теоремы Кронекера-Капелли. При этом решение $\{Y_1, Y_2\}$ должно иметь положительные компоненты, т.е. $Y_1 > 0,\ Y_2 > 0$. Это обстоятельство накладывает ограничения на коэффициенты $b_j^{(i)}$.

Таким образом, исследование системы (19) сводится к исследованию линейной алгебраической системы (25).

В заключение отметим, что полученные результаты являются новыми для систем связанных уравнений Клейна-Гордона и представляют интерес для нелинейной оптики и лазерной физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Masmoudi, N.*** From nonlinear Klein-Gordon equation to a system of coupled nonlinear Schrodinger equations / N. Masmoudi, K. Nakanishi // Math. Ann. 2002. Vol. 324. – N 2. – P. 359-389.
2. ***Wazwaz, Abdul-Majid.*** Solutions of compact and noncompact structures for nonlinear Klein-Gordon-type equation / Abdul-Majid Wazwaz // Appl. Math. and Comput. – 2003. – Vol. 134. – N 2-3. – P. 487-500.
3. ***Chen, Yu-zhi.*** A sufficient condition for the existence of global solutions to coupled nonlinear Klein-Gordon equation / Yu-zhi Chen, Xiao-qiang Zhang // J. Sichuan Norm. Univ. Natur: Sci. – 2004. – Vol. 27. – N 5. – P. 486-488.
4. Soliton solutions of coupled nonlinear Klein-Gordon equations / T. Alagesan [et al.] // Chaos, Solitons and Fractals. – 2004. – Vol. 21. – P. 879-882.
5. ***Жестков, С.В.*** О многомерном варианте метода Хироты для уравнения sin-Gordon / С.В. Жестков, В.И. Кувшинов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 3. – С. 86-90.
6. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
7. ***Ахмедиев, Н.Н.*** Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М: Физматлит, 2003. – 304 с.
8. ***Кившарь, Ю.С.*** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М: Физматлит, 2005. – 684 с.
9. ***Жестков, С.В.*** О построении нестационарных солитонов для систем второго порядка связанных уравнений Клейна-Гордона с керровской нелинейностью /

С.В. Жестков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Матер. научн. конф. “Герценовские чтения – 2007”. – Санкт-Петербург, 2007. – С. 55-59.

10. ***Glasunova, E.V.*** About a possibility of dark soliton spreading in medium with Kerr nonlinearity / E.V. Glasunova, V.A. Yurevich, S.V. Zhestkov // International Conf. on Coherent and Nonlinear Optics. ICONO 2007. – Proceedings. – Vol. 6725. – ICONO 2007: Nonlinear Space – Time Dynamics. – P. 67250H.

Поступила в редакцию 11.03.2008 г.