УДК 517.9

В.В. АМЕЛЬКИН

ИЗОХРОННЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Статья посвящена изложению результатов, касающихся теории так называемых изохронных высших порядков динамических систем на плоскости, являющихся подклассом вещественных систем вида

$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x,y), \; \dot{y} = x + \lambda y + Q(x,y), \tag{1}$$

где λ – некоторая постоянная (которая может быть и равной нулю), а $P, Q : G \to R$ – голоморфные в окрестности

$$G = \{(x,y) : |x| < r, |y| < r\}, \; r \in R^{+},$$

начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y свободных и линейных членов, т.е.

$$P(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n(x,y), \; Q(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} q_n(x,y).$$

К системе вида (1) приводится линейным преобразованием и изменением масштаба времени любая вещественная голоморфная монодромная система вида

$$\dot{x} = X(x,y), \;\; \dot{y} = Y(x,y) \tag{2}$$

с комплексно сопряженными корнями характеристического уравнения системы первого приближения.

Последнее означает, что система (1) – это канонический вид уравнений движения (2), описывающих в окрестности точки покоя $O(0,0)$ либо периодические движения, которым на фазовой плоскости соответствует состояние равновесия типа центра, либо затухающие колебания (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$), которым на фазовой плоскости соответствует состояние равновесия типа фокуса.

Заметим при этом, что изохронными могут быть только такие системы вида (2), которые соответствующими преобразованиями приводятся к системам вида (1).

Первыми исследованиями, связанными с изохронными колебаниями, можно считать исследования движения круговых маятников, проведенные еще Г. Галилеем в 1583 г., а также постановка и решение задачи о нахождении в вертикальной плоскости такой кривой, чтобы время, необходимое для спуска по ней до фиксированного горизонта тяжелой материальной точки, находящейся в начальный момент времени $t = t_0$ в состоянии покоя, не зависело от исходного положения точки на этой кривой.

Как показал Х. Гюйгенс, такой кривой оказалась циклоида. Указанное свойство циклоиды было использовано Х. Гюйгенсом в 1673 г. при конструировании им точных циклоидальных маятниковых часов. Циклоидальный маятник Х. Гюйгенса был, возможно, первым примером нелинейной изохронности, когда период движения маятника по циклоиде не зависел от амплитуды.

Более подробно об истории вопроса см. [1]. Исследования по проблеме изохронности колебаний имеют прямое отношение, например, к задачам общей теории конструирования точных приборов. Они также связаны с теорией спусковых регуляторов скорости, с теорией механизмов и деталей машин, с обработкой профилей зубьев шестерен, кулачков и различных эксцентриков.

Проблема изохронности колебаний привлекает внимание специалистов по теории летательных аппаратов, химических процессов, теории ядерных реакторов. Изохронные колебания встречаются в задачах математической физики, в теории бифуркаций, в задачах теории телекоммуникаций, когда искажения, возникающие при высокоскоростной передаче цифровых сигналов, устраняются введением адаптивных эквалайзеров.

Проблема изохронности тесно связана с проблемой устойчивости в смысле Ляпунова. Именно, для случая центра необходимым и достаточным условием устойчивости колебаний является изохронность этих колебаний.

Определение 1[2]. Для динамической системы (1) имеет место изохронность n-го порядка ($n \in N$), если все изображающие точки, лежащие при $t = t_0$ на луче ОА, составляющем с осью абсцисс угол $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, начиная в момент времени $t = t_0$ двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1), оказываются в момент времени $T = t_0 + 2\pi / n$ на луче ОА' с полярным углом $\varphi = \varphi_0 + 2\pi / n$.

Замечание 1. Изохронные 1-го порядка системы (1) часто просто называют изохронными.

Определение 2[3]. Для динамической системы (1) имеет место совершенная (равномерная) изохронность, если движение всех изображающих точек, лежащих при $t = t_0$ на луче ОА, составляющем с осью абсцисс угол $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, происходит по кривым центра или фокуса с одной и той же угловой скоростью.

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что для системы (1) имеет место совершенная изохронность тогда и только тогда, когда система имеет вид

$$\dot{x} = \lambda x - y + xf(x, y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + yf(x, y),$$

т.е. когда $xQ(x, y) + yP(x, y) = 0$.

Теорема 1 [1, с. 24]. Для того чтобы для динамической системы (1) имела место изохронность n-го порядка, необходимо и достаточно существование хотя бы одного значения $\varphi = \varphi_0$ $(\varphi_0 \in [0, 2\pi))$ такого, чтобы для функций ω_k – решений дифференциальных уравнений

$$\omega_k' + k\lambda\omega_k = -\sum_{i=1}^{k}\left(\omega_{k-i}' v_i + (k-i)\,\omega_{k-i} u_i\right), \quad \omega_0' = 1, \tag{3}$$

с начальными условиями $\omega_k(\varphi_0) = 0$, где

$$u_k(\varphi) = q_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi - p_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi,$$

$$v_k(\varphi) = q_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - p_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi,$$

выполнялись равенства

$$\omega_k\left(\varphi_0 + 2\pi / n\right) = 0,\ k = 1,2,...$$

Пусть $\varphi_0 + 2\pi m / n$, $m = \overline{0, n-1}$, – полярные углы $n \geq 2$ лучей l_ν, $\nu = \overline{1,n}$, с началом в точке O(0,0).

Определение 3 [4]. Для динамической системы (1) имеет место сильная изохронность n-го порядка, если все изображающие точки, лежащие при $t = t_0$ на n лучах l_ν, $\nu = \overline{1,n}$, начиная в момент времени $t = t_0$ двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1), переходят последовательно с одного из указанных n лучей на другой за одно и тоже время $T = 2\pi / n$.

Теорема 2 [1, с. 66; 5]. Для того чтобы для динамической системы (1) имела место сильная изохронность n-го порядка, необходимо и достаточно существование хотя бы одного значения $\varphi = \varphi_0$ такого, чтобы для функций ω_k – решений дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями $\omega_k\left(\varphi_0\right) = 0$, $k = 1,2,...$, выполнялись равенства

$$\omega_k\left(\varphi_0 + 2\pi l / n\right) = 0,\ l = \overline{1,n},\ k = 1,2,....$$

Теорема 3 [6]. Если для системы (1) имеет место сильная изохронность нечетного порядка n, то для такой системы имеет место и сильная изохронность четного порядка $2n$ (с общим полярным углом φ_0).

Теорема 4 [6]. Если для системы (1) имеет место изохронность 2-го порядка, то такая изохронность является и сильной изохронностью того же порядка.

Последний факт говорит о той особой роли, которую играет изохронность 2-го порядка в теории сильно изохронных систем, поскольку “поймав” изохронность 2-го порядка, всегда можно конечным числом шагов определить максимальный порядок сильной изохронности с вычисленным начальным полярным углом φ_0.

Отметим, что из определения 3 вытекают две основные задачи теории сильно изохронных систем:

1) определить наивысший порядок сильной изохронности конкретной системы вида (1);

2) указать начальный полярный угол φ_0 в случае наличия у конкретной системы вида (1) сильной изохронности.

Ниже остановимся на некоторых завершенных результатах, связанных с решением этих двух задач в случае центра.

Так, например, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \left(c - \alpha\right)x^2 - \left(b - 2\alpha - \beta\right)xy - \left(d - c\right)y^2, \\ \dot{y} &= x + \left(a + b\right)x^2 + \left(\alpha + 2c + d\right)xy + \left(\beta - \alpha\right)y^2, \end{aligned} \tag{4}$$

к которой может быть приведена любая автономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме с полиномиальными правыми частями второй степени без свободных членов и чисто мнимыми корнями характеристического уравнения системы первого приближения.

Теорема 5 [7]. Исключая случай системы (4) с условиями a=b=c=d=0 (случай совершенной изохронности), для нелинейной системы (4) в начале координат не может иметь места сильная изохронность центра выше второго порядка. Для того чтобы для нелинейной системы (4) в начале координат имело место сильная изохронность центра второго порядка, необходимо и достаточно выполнение одной из трех серий условий

1) $a = c = \alpha - d = \beta + b = 0;$

2) $3\alpha - 7d = 3\beta + 7b = a\left(a^2 + c^2\right) + b\left(b^2 - 3d^2\right) = c\left(a^2 + c^2\right) - d\left(d^2 - 3b^2\right) = 0;$

3) $\alpha - 13d = \beta + 13b = a\left(a^2 + c^2\right) - 27b\left(b^2 - 3d^2\right) = c\left(a^2 + c^2\right) + 27d\left(d^2 - 3b^2\right) = 0,$

причем при $b = 0$ угол $\varphi_0 = \pi / 2$, а при $b \neq 0$ угол $\varphi_0 = arctg\left(d / b\right)$.

Далее рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - (\psi + \theta)x^2 - (\chi - \beta)x^2 y - (3\psi - 3\theta - \gamma)xy^2 - (\mu - \nu)y^3, \\ \dot{y} &= x + (\mu + \nu)x^3 + (3\psi + 3\theta + \alpha)x^2 y + (\chi + \beta)xy^2 + (\psi - \theta)y^3, \end{aligned} \tag{5}$$

к которой может быть приведена любая автономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме с полиномиальными правыми частями третьей степени без однородностей второй степени и свободных членов и чисто мнимыми корнями характеристического уравнения системы первого приближения.

Теорема 6 [8]. Исключая случай системы (5) с условиями $\mu = \chi = \theta = \alpha + \gamma = \nu = \alpha + 4\psi = 0$ (случай совершенной изохронности), для нелинейной системы (5) в начале координат может иметь место сильная изохронность центра только второго и четвертого порядков. Выполнение одной из следующих двух серий условий

$$\begin{aligned} &1.\ \mu = \chi = \theta = \alpha + \gamma = \beta + 3\nu = \alpha + 6\psi = 0; \\ &2.\ \chi + 3\mu = \alpha + \gamma = \beta + 6\nu = 5\alpha + 24\psi = 4\psi^2 + 25\left(\nu^2 - \mu^2 - \theta^2\right) = \\ &\quad = \theta\alpha^2 - 4\theta\beta^2 - 4\alpha\beta\mu = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для нелинейной системы (5) в начале координат имела место сильная изохронность центра как второго, так и четвертого порядков. При этом в случае сильной изохронности второго порядка угол φ_0 любой, в случае же сильной изохронности четвертого порядка при выполнении серии условий (6_1) при $\nu = 0$ угол $\varphi_0 = \pi / 4$, а при $\nu \neq 0$ угол $\varphi_0 = \frac{1}{2} arctg \frac{\gamma}{6\nu}$, при выполнении же серии условий (6_2) при $\nu = 0$ угол $\varphi_0 = \pi / 4$, а при $\nu \neq 0$ угол $\varphi_0 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{\gamma}{12\nu}\right)$.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x} = -y - P_5(x, y),\ \dot{y} = x + Q_5(x, y), \tag{7}$$

где P_5 и Q_5 – однородные относительно *x* и *y* полиномы пятой степени.

В полярных координатах (ρ, φ), где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, система (7) принимает вид

$$\dot{\rho} = A(\varphi)\rho^5,\ \dot{\varphi} = 1 + B(\varphi)\rho^4,$$

где

$$A(\varphi) = R_6 \cos\left(6\varphi + \varphi_6\right) + R_4 \cos\left(4\varphi + \varphi_4\right) + R_2 \cos\left(2\varphi + \varphi_2\right) + R_0,$$

$$A(\varphi) = -R_6 \sin\left(6\varphi + \varphi_6\right) + r_4 \sin\left(4\varphi + \overline{\varphi}_4\right) + r_2 \sin\left(2\varphi + \overline{\varphi}_2\right) + r_0,$$

а R_i, r_i, φ_i, $\overline{\varphi}_i$ – некоторые вещественные постоянные.

Теорема 7[9]. Исключая случай системы (7) с условиями

$$A(\varphi) = -R_4 \sin 4\varphi + R_2 \cos 2\varphi, \;\; B(\varphi) \equiv 0$$

(случай совершенной изохронности), для нелинейной системы (7) в начале координат может иметь место сильная изохронность центра только четвёртого и восьмого порядков. Причем сильная изохронность четвертого порядка (соответственно восьмого порядка) имеет место тогда и только тогда, когда линейной заменой координат и изменением масштаба времени система (7) приводится к одной из систем, для которых

1. $A(\varphi) = \cos 2\varphi, \; B(\varphi) = 2\sin 2\varphi;$
2. $A(\varphi) = \dfrac{1}{2}\sin 4\varphi \pm \dfrac{5}{4}\cos 2\varphi, \;\; B(\varphi) = \cos 4\varphi \pm \sin 2\varphi;$
3. $A(\varphi) = \cos 6\varphi \mp \dfrac{1}{6}\sin 4\varphi + \dfrac{10}{3}\cos 2\varphi, \;\; B(\varphi) = -\sin 6\varphi \pm \dfrac{8}{3}\cos 4\varphi + \dfrac{5}{3}\sin 2\varphi;$
4. $A(\varphi) = \pm\cos 2\varphi, \;\; B(\varphi) = \cos 4\varphi \pm \sin 2\varphi;$
5. $A(\varphi) = \cos 6\varphi \pm \dfrac{5}{6}\sin 4\varphi - \dfrac{4}{3}\cos 2\varphi, \; B(\varphi) = -\sin 6\varphi - \sin 2\varphi;$
6. $A(\varphi) = r_4 \cos 4\varphi + R_2 \cos 2\varphi, \; B(\varphi) = r_4 \sin 4\varphi + 2R_2 \sin 2\varphi;$
7. $A(\varphi) = \pm\cos\left(2\varphi + \varphi_2\right), \; B(\varphi) = \sin 4\varphi \pm \sin\left(2\varphi + \varphi_2\right)$

(соответственно $A(\varphi) = -\sin 4\varphi, \; B(\varphi) = \cos 4\varphi$), при этом в случаях 1)-6) угол $\varphi_0 = \pi/4$, в случае 7) угол $\varphi_0 = \pi/4 - \varphi_2/2$ (соответственно угол $\varphi_0 = 0$).

Обратимся к системе

$$\dot{x} = -y - P_2(x,y), \;\; \dot{y} = x + Q_3(x,y), \tag{8}$$

где P_2 и Q_3 – однородные относительно x и y полиномы степеней 2 и 3 соответственно.

Т е о р е м а 8 [10]. Для нелинейной системы (8) в начале координат может иметь место сильная изохронность центра только второго порядка с $\varphi_0 = \pi/2$. Для наличия сильной изохронности второго порядка необходимо и достаточно, чтобы система (8) имела вид

$$\dot{x} = -y + Ax^2, \;\; \dot{y} = x + \frac{4}{9}A^2x^3.$$

Обратимся к системе

$$\dot{x} = -y, \;\; \dot{y} = x + Q_2(x,y) + Q_3(x,y), \tag{9}$$

где Q_2 и Q_3 – однородные относительно x и y полиномы степеней 2 и 3 соответственно.

Т е о р е м а 9 [11]. Для нелинейной системы (9) в начале координат может иметь место сильная изохронность центра только второго порядка с $\varphi_0 = \pi/2$. Для наличия сильной изохронности второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы система (9) имела вид

$$\dot{x} = -y\,,\ \dot{y} = x + 3axy + a^2x^3.$$

Пусть теперь дана гамильтонова система

$$\dot{x} = -y - a_{20}x^2 - a_{11}xy - 3a_{02}y^2 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2y - a_{03}y^3 - a_{40}x^4 - $$
$$- a_{31}x^3y - a_{22}x^2y^2 - a_{13}xy^3 - a_{04}y^4, \qquad (10)$$
$$\dot{y} = x + 3b_{20}x^2 + 2a_{20}xy + \frac{1}{2}a_{11}y^2 + b_{30}x^3 + 3a_{30}x^2y + a_{21}xy^2 + \frac{1}{3}a_{12}y^3 + $$
$$+ b_{40}x^4 + 4a_{40}x^3y + \frac{3}{2}a_{31}x^2y^2 + \frac{2}{3}a_{22}xy^3 + \frac{1}{4}a_{13}y^4.$$

Т е о р е м а 1 0 [11]. Для нелинейной системы (10) в начале координат может иметь место сильная изохронность центра только второго порядка. Причем сильная изохронность второго порядка имеет место тогда и только тогда, когда заменой переменных $u = \alpha x + \beta y$, $v = -\beta x + \alpha y$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, она приводится или к системе

$$\dot{u} = -v - au^2\,,\ \dot{v} = u + 2auv + 2a^2u^3,$$

где $a = a_{02} / \left(\alpha\beta^2\right)$, $\alpha\beta \neq 0$, и в этом случае $\varphi_0 = \pi / 2 + arctg\left(\beta / \alpha\right)$, или к системе

$$\dot{u} = -v - a_{20}u^2\,,\ \dot{v} = u + 2a_{20}uv + 2a_{20}^2u^3,$$

при $\beta = 0$, и в этом случае $\varphi_0 = \pi / 2$, или к системе

$$\dot{u} = -v - a_{11}uv - \frac{1}{2}a_{11}^2v^3\,,\ \dot{v} = u + \frac{1}{2}a_{11}v^2,$$

при $\alpha = 0$, и в этом случае $\varphi_0 = \pi$.

В заключение рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y - \sqrt{x^2 + y^2}\left(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2\right),$$
$$\dot{y} = x + \sqrt{x^2 + y^2}\left(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\right). \qquad (11)$$

Т е о р е м а 1 1 [11]. Исключая случай системы (11) с условиями $b_{20} = a_{02} = a_{20} + b_{11} = b_{02} + a_{11} = 0$ (случай совершенной изохронности), для нелинейной системы (12) в начале координат не может иметь места сильная изохронность центра выше второго порядка. Для того чтобы для нелинейной системы (11) в начале координат имела место сильная изохронность центра второго порядка, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{02} + 2a_{20} = b_{20} + 2b_{02} = a_{11} + 3b_{02} = b_{11} + 3a_{20} = 0,$$

причем при $b_{02} = 0$ угол $\varphi_0 = \pi / 2$, а при $b_{02} \neq 0$ угол $\varphi_0 = arctg\left(a_{20} / b_{02}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Амелькин, В.В.*** Изохронные и импульсные колебания двумерных динамических систем / В.В. Амелькин, Б.С. Калитин. – М.: Ком.Книга, 2006. – 208 с.
2. ***Абдуллаев, Н.*** Об изохронности при нелинейных колебаниях / Н. Абдуллаев // Тр. Таджик. Учит. Ин-та им. С.С. Айни, 1954. – Вып. 2. – С. 71-78.
3. ***Куклес, И.С.*** Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем / И.С. Куклес, Н.С. Пискунов // Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 17. – № 9. – С. 467-470.
4. ***Амелькин, В.В.*** О сильной изохронности дифференциальных систем Коши-Римана / В.В. Амелькин, Чинь Зань Данг // Весці АН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 1993. – № 2. – С. 26-30.
5. ***Амелькин, В.В.*** Изохронные и сильно изохронные колебания двумерных монодромных голоморфных динамических систем / В.В. Амелькин, О.Б. Корсантия // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 2. – С. 147-152.
6. ***Амелькин, В.В.*** О порядке сильной изохронности плоских динамических систем / В.В. Амелькин // Дифференц. Уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 10. – С. 1427-1429.
7. ***Амелькин, В.В.*** Сильная изохронность центра динамических систем с полиномами второй степени / В.В. Амелькин, Чинь Зань Данг // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 5. – С. 739-743.
8. ***Амелькин, В.В.*** Сильная изохронность центра динамических систем с неполными полиномами третьей степени / В.В. Амелькин, Чинь Зань Данг // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 6. – С. 1057-1060.
9. ***Доличанин, Д.*** Сильная изохронность центра плоских динамических систем с однородными нелинейностями пятой степени / Д. Доличанин, О.Б. Корсантия // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 10.
10. ***Корсантия, О.Б.*** О сильной изохронности центра одной полиномиальной системы / О.Б. Корсантия // Вестник Белорус. гос. ун-та. – Сер. 1. – Физ.Мат.Инф. – 2005. – № 1. – С. 82-85.
11. ***Амелькин, В.В.*** Сильная изохронность полиномиальных дифференциальных систем с центром / В.В. Амелькин, Касим Мухамед Аль-Хайдер // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 7. – С. 867-873.

Поступила в редакцию 19.08.2008 г.