УДК 517.9

В.И. МИРОНЕНКО

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Поведение реальной детерминированной системы описывается системой дифференциальных уравнений. Реальная система имеет бесконечно много режимов поведения. Каждый режим поведения реальной системы описывается соответствующим решением дифференциальной системы (в качестве реальной системы читатель может представлять себе маятниковые часы).

В работе изложена методика применения отражающей функции (ОФ) [1-2] к исследованию свойств решений дифференциальных систем.

Среди бесконечного множества режимов поведения реальной системы, как правило, интересны лишь некоторые, обладающие свойством устойчивости [3]. Эти выделяемые нами режимы поведения обладают некоторой регулярностью, чаще всего периодичностью во времени. В соответствии с этим среди бесконеч-

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

ного множества решений дифференциальной модели мы выделяем ее периодические решения.

Таким образом, задача о наличии периодических решений дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \; t \in R, \; x \in D \subset R^n \tag{1}$$

и их устойчивости является весьма важной задачей. Впервые на это обратил внимание А. Пуанкаре [4, с. 75]. С тех пор задача о существовании и устойчивости периодических решений дифференциальных систем исследовалась многими авторами. Разработано большое количество методов решения этой задачи. Однако, в силу сложности рассматриваемой задачи, до сих пор нет регулярного метода ее решения.

Все известные методы изучения периодических решений так или иначе связаны с отображением Пуанкаре (отображением за период $[t_0; t_0 + 2\omega]$, где 2ω – период правой части системы (1)).

Пусть $\varphi(t;\tau,x_0)$ есть общее решение в форме Коши системы (1), которую мы считаем удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности и 2ω-периодической по t. Тогда отображение за период $[\tau;\tau + 2\omega]$ определяется формулой $\Pi_\tau(x) := \varphi(\tau + 2\omega;\tau,x)$. Обычно считают, что $\tau = 0$. В развиваемом подходе будем считать, что $\tau = -\omega$, тем самым, рассматривая отображение $\Pi(x) := \varphi(\omega;-\omega,x)$ за период $[-\omega;\omega]$.

Зная отображение за период, можно решить задачу о существовании и устойчивости периодических решений. На первый взгляд кажется, что отображение за период мы можем найти только тогда, когда сможем проинтегрировать систему (1) и найти ее общее решение $\varphi(t;\tau,x)$. Автор показал, что это мнение ошибочно. С этой целью им была введена функция $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$, названная отражающей функцией (ОФ). Эта функция определяется для любой, не обязательно периодической системы (1) и обладает следующими важными свойствами [1-2]:

1. Если правая часть системы (1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega,x) \equiv \equiv \varphi(\omega;-\omega,x)$ есть отображение за период $[-\omega;\omega]$ этой системы, и потому ее решение $\varphi(t;-\omega,x_0)$ будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда x_0 есть решение алгебраической системы $F(-\omega,x) = x$. Более того, знание отображения $F(-\omega,x)$ за период $[-\omega;\omega]$ позволяет найти не только начальные данные периодических решений системы (1), но и выяснить характер их устойчивости, используя понятие устойчивости неподвижной точки отображения [5, с. 209].

2. Для любого решения $x(t)$ системы (1), определенного при $t = 0$, верно тождество $x(-t) \equiv F(t,x(t))$. Таким образом, ОФ позволяет по состоянию $x(t)$ системы найти ее состояние $x(-t)$ в симметричный момент времени $(-t)$. Это свойство и отражено в названии (при этом t иногда лучше считать не временем, а расстоянием).

3. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \;\; F(0,x) = x. \tag{2}$$

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

4. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ хотя бы одной дифференциальной системы тогда и только тогда, когда выполняются тождества

$$F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x. \tag{3}$$

В частности, она является ОФ системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}F_x(-t,F(t,x))F_t \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4}$$

5. Две системы вида (1) с отражающими функциями $F_1(t,x)$, $(t,x) \in D_1$, и $F_2(t,x)$, $(t,x) \in D_2$, называются эквивалентными, если $F_2(t,x) \equiv F_1(t,x)$ для любой точки $(t,x) \in D_1 \cap D_2$. (Множество $D_1 \cap D_2$ не пусто, так как оно содержит все точки (t,x) вида $(0,x)$, где $x \in D_1 \cap D_2$). Класс эквивалентности, определяемый ОФ $F(t,x)$, записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F), \tag{5}$$

где $R(t,x) = (R_1(t,x),...,R_n(t,x))^T$ есть произвольная векторная функция, для которой решения системы (4) однозначно определяются своими начальными условиями. Эквивалентные системы, грубо говоря, имеют одинаковые отображения за период $[-\omega;\omega]$.

6. В каждом классе эквивалентности есть простая и простейшая системы. Простая система имеет вид (4), а простейшая имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + E\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} \equiv P(t,x).$$

Является заданная система простейшей или нет, всегда можно определить благодаря свойству $P(-t,F(t,x)) \equiv P(t,x)$, присущему только правой части простейшей системы.

7. Система

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y), \; t \in R, \; y \in G, \tag{6}$$

эквивалентна системе (1) тогда и только тогда, когда $X(0,x) \equiv Y(0,x)$ и совместна система уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}X(t,x) + X(-t,F) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}Y(t,x) + Y(-t,F) = 0,$$

$$F(0,x) \equiv x.$$

Благодаря этому свойству, используя теорему Фробениуса [6, с. 152-153] в простейших случаях можно определить, являются ли данные системы (1) и (6) эквивалентными.

8. Если $\Delta_1(t,x),...,\Delta_m(t,x)$ суть решения системы

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta=0, \tag{7}$$

то все системы вида

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x)+\alpha_1(t)\Delta_1(t,x)+\ldots+\alpha_m(t)\Delta_m(t,x), \tag{8}$$

где $\alpha_1(t),\ldots,\alpha_m(t)$ нечетные скалярные непрерывные функции, эквивалентны между собой и эквивалентны системе (1).

Пользуясь выписанными выше основными свойствами ОФ, можно решать различные задачи качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений. При решении задачи о периодических решениях 2ω-периодической системы (1) можно поступать следующим образом. Если система (1) интегрируется в квадратурах, то задача о периодических решениях решается обычным способом, с использованием отображения за период. Если же система (1) не интегрируется, то можно попытаться найти ее ОФ $F(t,x)$, решая задачу Коши (2). В случае успеха мы получим отображение $F(-\omega,x)$ за период $[-\omega,\omega]$. Конечно же, уравнение (2) имеет более сложную природу, чем система (1), но нам нужны не все решения уравнения (2), а лишь одно, которое мы можем иногда найти, задавшись определенным видом этого решения, например, считая $F(t,x)=F(t)x$ линейной. Эта ситуация напоминает ситуацию с интегрирующим множителем. Следует подчеркнуть, что построение ОФ как решения уравнения (2) не позволяет проинтегрировать саму систему (1). В случае, когда мы не можем ни проинтегрировать систему (1), ни решить задачу (2), можно попытаться найти хотя бы некоторые решения уравнения (7). Тогда построив эквивалентные системы вида (8), можно надеяться на получение дополнительной информации о решениях системы (1).

При построении систем, эквивалентных данной системе (1), помимо утверждений пунктов 7 и 8 может оказаться полезным утверждение

Если система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта стационарная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=X(0,x). \tag{9}$$

Если мы имеем дело со скалярным уравнением (1), то уравнение (9) можно проинтегрировать, найти его ОФ и дать полный ответ на вопрос, является уравнение (1) эквивалентным стационарному уравнению (9) или нет.

Если система (9) является системой вида $\dot{x}=Ax$, т.е. если $X(0,x)=Ax$, где $A-$ постоянная матрица, то ОФ системы (9) имеет вид $F(t,x)=e^{-2At}x$. Поэтому система (1) эквивалентна линейной стационарной системе тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$X(t,x)+e^{2At}X(-t,e^{-2At}x)\equiv 2Ax, \text{ где } Ax=X(0,x).$$

Читатель без труда ответит на вопрос: "Когда система (1) эквивалентна линейной системе и, значит, имеет линейную ОФ вида $F(t,x)=F(t)x$?" Для этого достаточно решить уравнение (2), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{dF(t)}{dt}x+F(t)X(t,x)+X(-t,F(t)x)\equiv 0.$$

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Пользуясь изложенными выше фактами, мы можем получать новые различные результаты, относящиеся не только к теории периодических уравнений, но и к теории краевых задач. В заключение приведем один результат, который можно использовать при решении проблемы "центра-фокуса". В связи с этим будем использовать обозначения r и φ, как полярные координаты на плоскости.

Теорема. *Пусть для уравнения*

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{A_0(\varphi)+A_1(\varphi)r+A_2(\varphi)r^2+A_3(\varphi)r^3+A_4(\varphi)r^4}{m(\varphi)r^2-1} \tag{10}$$

с непрерывными периодическими коэффициентами выполнены следующие условия:

1) $A_4(\varphi)\equiv A_0(\varphi)m^2(\varphi)$ *и* $A_3(\varphi)\equiv A_1(\varphi)m(\varphi)-m'(\varphi)$,

2) функции $\alpha(\varphi)\equiv(A_2(\varphi)-2m(\varphi)A_0(\varphi))e^{-\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau}$ *и* $\beta(\varphi)\equiv A_0(\varphi)e^{\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau}$

являются нечетными.

Тогда ОФ $F(\varphi,\tau)$ *уравнения (10) задается формулой*

$$\frac{1}{F(\varphi,r)}+m(-\varphi)F(\varphi,r)=\left(\frac{1}{r}+m(\varphi)r\right)e^{\int_\varphi^{-\varphi}A_1(\tau)d\tau}. \tag{11}$$

Если при этом еще и $\int_{-\pi}^{\pi}A_1(\tau)d\tau=0$, *то все продолжимые на* $[-\pi;\pi\}$ *решения уравнения (10) суть* 2π *– периодические функции, а соответствующая система на плоскости имеет центр в начале координат.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $U(\varphi,r)\equiv\left(\frac{1}{r}+rm(\varphi)\right)e^{-\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau}$.

Для ее производной вдоль решений уравнения (10) справедливы равенства

$$\frac{dU(\varphi,r)}{d\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}=(m'r-\frac{A_1}{r}-mA_1r)e^{-\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau}+$$

$$+\frac{mr^2-1}{r^2}e^{-\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau}\left(\frac{A_0+A_1r+A_2r^2+A_3r^3+A_4r^4}{mr^2-1}\right)=\beta U^2+\alpha.$$

Таким образом, для любого решения $r(\varphi)$ уравнения (10) верно тождество

$$\frac{dU(\varphi,r(\varphi))}{d\varphi}=\alpha_\varphi+\beta_\varphi U^2(\varphi,r(\varphi)),$$

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

где α и β – нечетные функции от φ. Но тогда согласно [2, с. 65] $U(\varphi, r(\varphi))$ есть четная функция. Поэтому $U(-\varphi, F(\varphi, r(\varphi))) = U(\varphi, r(\varphi))$. Из этого тождества мы и получим соотношение (11) для ОФ уравнения (10).

В том случае, когда $\int_{-\pi}^{\pi} A_1(\tau)d\tau = 0$, ОФ уравнения (10) является 2π-периодической и потому автономная система, соответствующая этому уравнению, имеет центр. Теорема доказана.

Заметим, что если $\int_{-\pi}^{\pi} A_1(\tau)d\tau \neq 0$, то двумерная система, соответствующая уравнению (10), имеет предельный цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мироненко, В.И.*** ОФ и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Изд-во “Университетское”, 1986. – 76 с.
2. ***Мироненко, В.И.*** ОФ и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: Мин. образования РБ, УО “ГГУ им. Ф. Скорины”, 2004. – 196 с.
3. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. ***Пуанкаре, А.*** Избранные труды: в 3 т. / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971 – 1974. – Т. 1: Новые методы небесной механики, 1971. – 771 с.
5. ***Арнольд, В.И.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
6. ***Хартман, Ф.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М.: Мир, 1970. – 720 с.

Поступила в редакцию 02.09.2008 г.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова