

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ МОДУЛИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

*В работе исследуется формирование электростатических модулированных волн и структур в магнитосферной плазме. На основе магнитогидродинамической теории движения заряженных частиц получено нелинейное эволюционное уравнение типа уравнения Шредингера. Рассмотрена двухкомпонентная плазма, состоящая из холодных ионов и неизотермических горячих электронов. На основе анализа коэффициентов эволюционного уравнения и построения фазового портрета исследуются возможные решения модуляционного типа в магнитосферной плазме. Результаты численных моделей могут применяться при анализе результатов космических экспериментов по исследованию магнитосферы Земли.*

## Введение

В космических экспериментах, проводимых на ракетах и спутниках, были зарегистрированы нелинейные электростатические структуры различного типа, например, солитонные электронно- и ионно-акустические структуры, двойные

слои, а также модулированные волны и структуры [1-3]. Стационарные солитонные структуры образуются при компенсации нелинейности среды дисперсионными эффектами. Эволюция таких структур в плазме исследовалась в работах [1-5] и описывалась уравнением Кортевега-де Вриза или модифицированными уравнениями этого типа, например, уравнениями Захарова-Кузнецова [5]. Особый интерес представляют зарегистрированные в космических экспериментах электростатические модулированные волны и структуры [6].

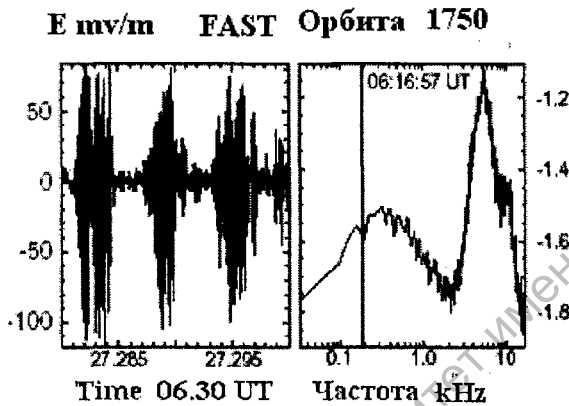


Рис. 1. Волновые формы, зарегистрированные на спутнике FAST [6]

Такие волны могут возникать в средах, где дисперсия сильнее нелинейности. В этом случае волны являются почти периодическими, и нелинейные искажения несущей волны являются малыми. Однако дисперсия приводит к возникновению гармоник основной частоты и к расплыванию волны. В таких средах изменение скорости волны за счет нелинейности значительно меньше разницы между скоростью собственной волны на основной частоте и ее ближайшей гармонике. В модулированной волне нелинейные искажения становятся существенными на больших пространственно-временных масштабах. В данной работе на основе магнитогидродинамической теории при учете реальных физических условий в космической магнитосферной плазме получено эволюционное уравнение и анализируются возможные решения.

### 1. Теоретическая модель

Ниже рассмотрим формирование одномерной электростатической структуры в многокомпонентной плазме на основе многожидкостной магнитогидродинамической модели (МГД). Будем предполагать, что в плазме с постоянным магнитным полем  $\vec{B}$  существуют несколько различных популяций заряженных частиц – электронов и ионов. Плотность  $n_\alpha$ , скорость  $\vec{v}_\alpha$  и давление  $P_\alpha$  заряженных частиц сорта  $\alpha$  описываются системой квазижидродинамических уравнений (МГД):

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \nabla) \vec{v}_\alpha = -\nabla \frac{e_\alpha \varphi}{m_\alpha} - \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} \nabla P_\alpha + \omega_{c\alpha} [\vec{v}_\alpha, \vec{e}_z], \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla n_\alpha \vec{v}_\alpha = 0, \quad (2)$$

$$P = C \cdot n_i^\nu, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \Phi = n_e - n_i, \quad (4)$$

здесь нормализованные величины определены

$$\alpha = i, \quad \Phi_\alpha = \Phi_i \quad t \Rightarrow t \cdot \omega_{oi}; \quad \nabla \Rightarrow \frac{C_s}{\omega_{oi}} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \Delta \Rightarrow \frac{C_s^2}{\omega_{oi}^2} \Delta; \quad r \Rightarrow \frac{r \omega_{oi}}{C_s}, \quad v_i \Rightarrow \frac{v_i}{C_s};$$

и обозначено  $\omega_{oi} = \left( \frac{e^2 n_{0i}^c}{m_i \epsilon_0} \right)^{1/2}$  – плазменная ионная частота,  $C_s = (kT_e m_i)^{1/2}$  –

скорость звука,  $P$  – давление ионов, нормированное на равновесное давление  $P_0 = n_0 T_e$ ,  $\omega_{ci}$  – гирочастота ионов, нормированная на плазменную ионную частоту,  $\nu$  – отношение молярной теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  к  $C_v$  при постоянном объеме для адиабатического процесса  $\nu = 5/3$  в трехмерной модели, а для одномерной модели  $\nu = 3$ .

Рассмотрим одномерное движение заряженных частиц сорта  $\alpha$  ( $e$  – электроны,  $i$  – ионы). Это условие одномерного движения реализуется в областях магнитосферы, где движение заряженных частиц преимущественно происходит вдоль направления магнитного поля. Далее предполагаем, что плазма состоит из следующих популяций заряженных частиц:

1. Горячие неизотермические электроны, которые описываются следующей функцией распределения по скоростям:

$$f_e(v) = \frac{n_0}{(1 + 3\alpha) \left( 2\pi v_e^2 \right)^{1/2}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{v^2}{v_e^2} - 2\Phi \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{v_e^2} - 2\Phi \right) \right), \quad (5)$$

где  $\Phi = \frac{e\varphi}{kT_e}$  – нормализованный электростатический потенциал,  $v_e = \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}$  –

тепловая скорость электронов,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_e$  – температура электронов,  $v = v(v_x, v_y, v_z)$  – скорость электронов. Относительная плотность электронов, соответствующая распределению (5) имеет вид

$$n_e = \frac{n_e}{n_{0e}} = (1 - \beta\Phi + \beta^2\Phi) \cdot e^\Phi. \quad (6)$$

здесь  $\beta = \frac{4\alpha}{1 + 3\alpha}$ ,  $n_{0e}$  – равновесная плотность электронов и  $\alpha$  – произвольный

параметр, определяющий форму функции распределения, которая может быть выбрана из эксперимента. При значении  $\beta \rightarrow 1$  функция распределения (1) описывает два пучка заряженных частиц, движущихся в противоположном направлении с одинаковой скоростью.

2. Холодные магнитогидродинамические ионы с температурой  $T_i^c$  ( $\sigma_i = T_i^c / T_e$ ) и потоковой скоростью (холодный ионный пучок), их динамика описывается магнитогидродинамической системой уравнений [1-4].

Для выбранной модели плазмы уравнение Пуассона (4) примет вид:

$$\frac{d^2\Phi}{dS^2} = \left(1 - \beta\Phi + \beta^2\Phi^2\right)e^\Phi - N_i. \tag{7}$$

Система уравнений (1-3) совместно с уравнением (7) описывает эволюцию волновых возмущений в выбранной модели плазмы. Предположим, что в плазме имеются малые возмущения плотности заряженных частиц и зададим электростатический потенциал в виде:

$$\tilde{n}, \tilde{v}, \tilde{\Phi} \Rightarrow A_l^n(x, \vec{r})e^{i(-\omega t + \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \tag{8}$$

Здесь к.с. – комплексно-сопряженная величина,  $A_l^n(x, t)$  – медленно-изменяющаяся комплексная амплитуда, которую мы разлагаем по порядку малости,  $\theta_l$  – фаза гармоники с номером  $l$ :

$$A_l^n = A_{0l}^0 + \varepsilon A_l^{(1)} + \varepsilon^2 A_l^{(2)} + \varepsilon^3 A_l^{(3)} + \tag{9}$$

$$A_l^{(1)} = A_0^{(1)} + A_1^{(1)}e^{i\theta} + A_2^{(1)}e^{i2\theta}, \quad \theta_l = l(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \tag{10}$$

$\varepsilon$  – малый параметр, причем,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – порядок нелинейности, и  $l \leq n$ . Соотношение (9) соответствует учету нелинейности 3-го порядка  $n = 3$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ .

Далее предполагаем, что в плазме существуют быстрые и медленные пространственно-временные масштабы, т.е. введем новые переменные

$$S = \varepsilon(x - Vt), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{11}$$

Замена переменных соответствует переходу в сопутствующую систему координат, в которой амплитуда медленно изменяется в пространстве и времени из-за эффектов нелинейности и дисперсии. Таким образом, мы рассматриваем квазистационарную электростатическую структуру, движущуюся с постоянной скоростью  $V$  вдоль направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Параметр  $V$  определяет скорость движения квазистационарной структуры, которая определяется в рамках выбранного нелинейного приближения. Для простейшей одномерной структуры эта скорость соответствует групповой скорости модулированной волны

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Учитывая соотношения (8-10) определим операторы системы уравнений (1)-(4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \left( (-i\omega l - \varepsilon V \frac{\partial}{\partial S} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}) A_l^n \right) e^{i\theta l} \tag{12}$$

$$\nabla \Rightarrow \left( \left( ikl + \varepsilon \frac{\partial}{\partial S} \right) A_l^n \right) e^{i\theta l} \tag{13}$$

$$\Delta \Rightarrow \left( \left( -k^2 l^2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 2i\varepsilon l k \frac{\partial}{\partial S} \right) A_l^n \right) e^{i\theta l} \tag{14}$$

Подставляя соотношения (12)-(14) в систему уравнений (1)-(4) можно определить плотность  $n_l^{(n)}$ , скорость  $v_l^{(n)}$  и электростатический потенциал  $\Phi_l^{(n)}$  при учете нелинейности  $n$ -ого порядка. Также учтем разложение по малому параметру экспоненты, входящей в уравнение Пуассона (7),

$$e^\Phi = \Phi_l^{(n)} + \frac{1}{2}(\Phi_l^{(n)})^2 + \frac{1}{6}(\Phi_l^{(n)})^3. \quad (15)$$

Так, для приближения 1 порядка получаем решение:

$$v_0^{(1)} = V, \quad n_l^1 = \frac{k v_l^{(1)}}{\omega}, \quad n_l^{(1)} = \frac{k^2}{\omega^2} \Phi_l^{(1)} = \beta_2 \Phi_l^{(1)}, \quad \beta_2 = (b_1 + k^2 l^2) \quad (16)$$

$$v_l^{(1)} = \frac{k}{\omega} (\alpha + \bar{\sigma} \beta_2) \Phi_l^{(1)}, \quad b_2 = 1 - \beta, \quad \bar{\sigma} = 2\sigma/3, \quad \omega_l^2 = \frac{k^2 (\alpha + \bar{\sigma} \beta_2)}{b_1 + k^2 l^2} \quad (17)$$

Соотношение (17) определяет закон дисперсии модулированных волн. В длинноволновом приближении  $k \ll 1$  и  $\beta = 0$ ,  $\bar{\sigma} = 0$  и при условии изотермичности плазмы, частота волны пропорциональна волновому вектору, что означает, что фазовая скорость совпадает с групповой скоростью.

На рис. 1. изображены дисперсионные кривые для первой, второй и третьей гармоники при различных параметрах плазмы.

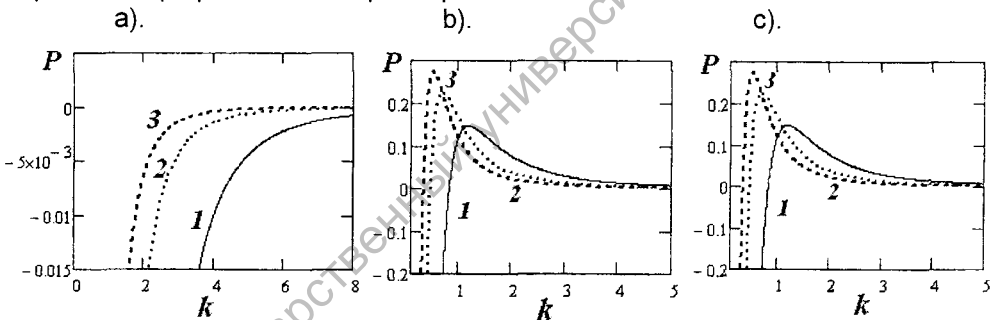


Рис. 2. Дисперсионные зависимости модулированных волн  
Числа над кривыми 1, 2, 3 – номера гармоник.

Значения параметров плазмы: а).  $\sigma = 0, \beta = 0$ ; а).  $\sigma = 0.5, \beta = 0$ ; а).  $\sigma = 1, \beta = 0.9$ ;

Для второго порядка получаем систему уравнений для плотности, скорости и электростатического потенциала второго порядка:

$$\begin{aligned} i\omega v_l^{(2)} - ikla_1 \Phi_l^{(2)} &= B_2 \\ i\omega n_l^{(2)} - ikla_1 v_l^{(2)} &= A_2 \\ \beta_2 \Phi_l^{(2)} - n_l^{(2)} &= C_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$A_{2l} = -V \frac{dn_l^{(1)}}{ds} + \frac{dv_l^{(1)}}{ds} + ikl n_l^{(1)} v_l^{(1)},$$

$$B_{2l} = -V \frac{dv_l^{(1)}}{ds} + \frac{dv_l^{(1)}}{ds} + ikl (v_l^{(1)})^2 \quad C_{2l} = 2ikl \frac{d\Phi_l^{(1)}}{ds} - b_2 (\Phi_l^{(1)})^2 \quad (19)$$

Условие разрешимости системы уравнений (18) второго порядка нелинейности при выполнении соотношений (19) запишем в виде:

$$D_2 = A_2 + \frac{k}{\omega} B_2 + i\omega l C_2 = 0. \quad (20)$$

Подставляя в уравнение (20) соотношение (19) и, учитывая найденные величины первого порядка (16), (17) определим параметр  $V$ :

$$V = v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}, \quad v_g = \frac{\omega^3}{k^3}, \quad (21)$$

$v_g$  – групповая скорость с которой волна распространяется вдоль направления модуляции.

Физический смысл этого выражения состоит в том, что во втором приближении скорость движения комплексной амплитуды совпадает с групповой скоростью основной гармоники  $n = 2$ ,  $l = 1$ .

Из системы уравнений (18), учитывая соотношение (19), можно определить плотность, скорость и потенциал второго приближения:

$$n_l^{(2)} = i \frac{\partial \Phi_l^{(1)}}{\partial x}, \quad \lambda_l = b_2 a / b + 2kl. \quad (22)$$

Условие (20) определяет произвольное значение для потенциала  $\Phi_l^{(2)}$ , для простоты выбираем  $\Phi_l^{(2)} = 0$ . Далее аналогичным способом определим систему уравнений для величин третьего порядка:

$$\begin{aligned} i\omega v_l^{(3)} - ikl\beta_3 \Phi_l^{(3)} &= B_3, & \beta_3 &= \alpha + \tilde{\sigma}\beta_2 \\ i\omega n_l^{(3)} - iklv_l^{(3)} &= A_3 \\ \beta_2 \Phi_l^{(3)} - n_l^{(3)} &= C_3 \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношения, вытекающее из условия разрешимости системы уравнений (23), примет вид:

$$D_3 = A_3 + \frac{k}{\omega} B_3 + i\omega l C_3 = 0. \quad (24)$$

$$A_3 = \beta_2 \frac{\partial \Phi_l^{(1)}}{\partial \tau} - iV\lambda_l \frac{\partial^2 \Phi_l^{(1)}}{\partial s^2} + \frac{\partial(\Phi_l^{(1)})}{\partial s} \left( \frac{\omega}{k} \beta_2^2 - \frac{\beta_2}{2} (\omega\lambda_1 + \lambda_2) \right)$$

$$B_3 = \beta_2 \frac{\omega}{k} \frac{\partial \Phi_l^{(1)}}{\partial \tau} - iV\lambda_2 \frac{\partial^2 \Phi_l^{(1)}}{\partial s^2} + \frac{\partial(\Phi_l^{(1)})}{\partial s} \omega \beta_2 \lambda_2. \quad (25)$$

$$C_3 = -b_3 (\Phi_l^{(1)})^3, \quad b_3 = 1/6 - \beta/2 + \beta^2$$

Подставляя в (24) соотношение (25), получим окончательно уравнение для гармоники  $l = 1$ ,  $n = 3$ :

$$\xi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\xi_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} + i\xi_3 |\psi|^2 \psi = 0$$

Здесь обозначено  $\psi = \Phi_1^{(1)}$ . Умножая это уравнение на  $i \xi_1^{-1}$ , окончательно получаем нелинейное уравнение Шредингера.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} + Q \psi |\psi|^2 = 0. \tag{26}$$

Здесь обозначено:  $Q$  – коэффициент нелинейности третьего порядка, а коэффициент дисперсии  $P$  связан с кривизной дисперсионной кривой и определяется соотношением:

$$P = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_l}{dk^2} = \frac{3 \omega_l}{2} \left( \frac{\omega_l^4}{k} \right).$$

Используя замену:

$$A(x, t) = a e^{i\varphi} \quad \psi(x, t) = A(x, t) e^{i(\omega_l t - kx)} + k.c.$$

Если ввести новую переменную  $u = -2\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , то из уравнения (26) можно получить систему уравнений для действительных переменных – амплитуды и фазы квазигармонической волны.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -q \frac{\partial a^2}{\partial x} + 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} a^2 u = 0 \tag{28}$$

Введенный параметр  $q = 2\beta\alpha$  зависит от нелинейности и дисперсии, что означает, что эволюция нелинейных волн определяется совместным действием нелинейности и дисперсии.

Далее рассмотрим простейший случай и предположим, что модуляция является настолько медленной, что можно пренебречь дисперсией групповой скорости, что позволяет пренебречь вторым членом в правой части уравнения (27). Даже в этом простом случае видно, что частотная и амплитудная модуляция являются взаимосвязанными.

Значительный интерес представляет исследование эволюции стационарных волн огибающих.

Полагая в системе уравнений (27), (28),  $a(x, t)$  и  $U(x, t)$  зависят от одной переменной  $S = x - Vt$ ,  $V = const$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial S^2} + \frac{a}{2\beta^2} (C_2' - qa^2) = 0 \tag{29}$$

$$C_2 = \tilde{C}_2 + \frac{V^2}{2}$$

Уравнение (30) представляет собой известное уравнение Дуффинга. К тому уравнению сводятся уравнения колебаний маятника при достаточно малых углах отклонения от положения равновесия. Его решение можно выразить в

эллиптических функций. Для выяснения характера решения, можно уравнение (30) представить в нормализованном виде:

$$\ddot{x} + ax + bx^3 = 0, \quad (30)$$

Числа  $a, b$  – равны 1 по модулю, но могут иметь разные знаки.

Однако для наглядности построим фазовый портрет процесса, записав уравнение (30) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) &= E \\ V(x) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

Фазовый портрет определяется соотношением при:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{E - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}}. \quad (32)$$

Рассмотрим поведение нелинейной колебательной системы, описываемой уравнение (32) при  $a < 0, b > 0$  коэффициентов. Заметим, что при различных значениях  $E$ , получаем семейство интегральных кривых, изображенных на рис. 2.

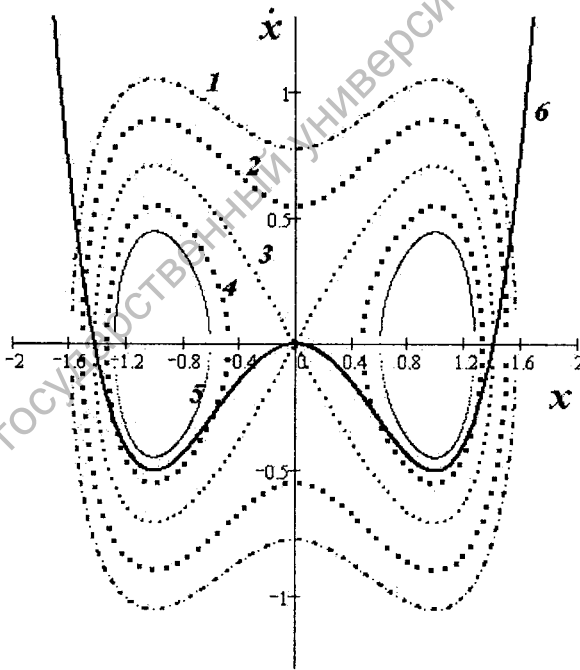


Рис. 3. Фазовый портрет уравнения (30)

В этом случае система имеет три особых точки – одну типа центр, которая определяет положение равновесия  $x_1 = 0$  и две точки типа седла при  $x_{2,3} = \pm 1$ . Особо следует отметить существование локализованного волнового пакета – солитона огибающей. Заметим, что сепаратрисе фазового портрета соответствует солитонное решение в виде модулированной волны:



$$u(x,t) = a_0 \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}/2\beta)(x - v_g t) \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) + k.c. \quad (33)$$

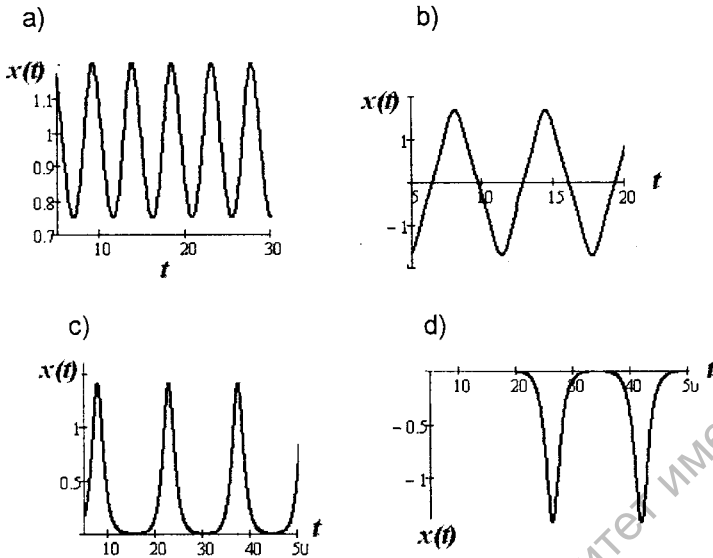


Рис. 4. Временные зависимости волн огибающих для траекторий: а)- 5; б)- 4; с), д)-3

При противоположных знаках коэффициентов  $a$  и  $b$ ,  $a > 0, b < 0$  уравнение (32) примет вид:

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0. \quad (34)$$

и система имеет единственную особую точку типа центр, а все фазовые траектории являются замкнутыми и соответствуют периодическим решениям. Аналитически эти решения могут быть выражены через эллиптический косинус Якоби. При малых амплитудах это решение близко к гармоническому. При больших амплитудах форма колебаний уже отличается от гармонической и их основная частота растет пропорционально величине амплитуды. Фазовый портрет, соответствующий этому уравнению изображен на рис. 5.

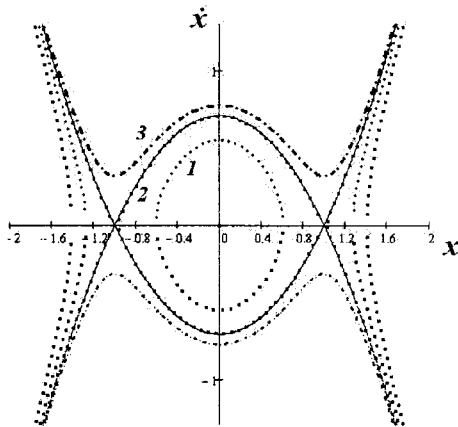


Рис. 5. Фазовый портрет уравнения (31) при  $a > 0, b < 0$ .

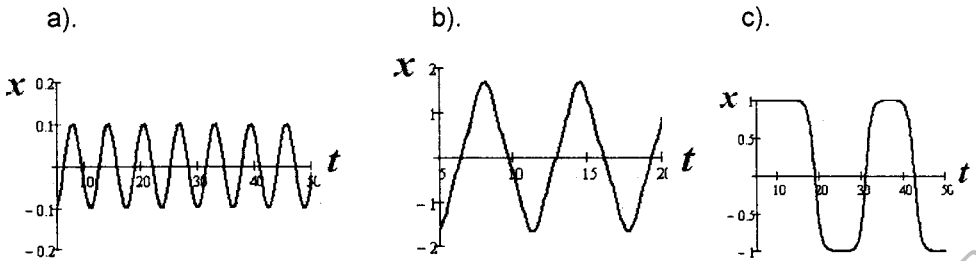


Рис. 6. Временные зависимости волн огибающих для траекторий: а)-1 б)- 3; с), 2.

Если  $E < 1/4$ , то фазовые траектории являются замкнутыми, в противном случае – разомкнутыми. При  $E = 1/4$  локализованной уединенной волны не существует, но имеется, так называемый темный солитон волны огибающей, который можно описать выражением:

$$U(x,t) = u_m \operatorname{th}[\sqrt{qu_m / 2\beta}(x - v_g t)] \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) + k.c. \quad (35)$$

Окончательно из проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Эволюция нелинейных модулированных волн при учете членов третьего порядка нелинейности в рамках двухжидкостной модели магнитосферной плазмы описывается нелинейным уравнением Шредингера.
2. При учете неизотермичности электронов  $\beta \neq 0$  и неоднородности  $\sigma \neq 0$  плазмы коэффициент дисперсии  $\mu$  может изменять свой знак (рис. 2), что расширяет область возможных решений. В частности, возможны, как солитонные модулированные волны, так и решения в виде двойных слоев.
3. Развитый метод исследования возможных решений нелинейных эволюционных уравнений, основанный на анализе коэффициентов нелинейности и дисперсии и построении фазового портрета процесса может применяться при интерпретации экспериментальных данных по исследованию *магнитосферы Земли, получаемые с ракет и спутников.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Volosevich, A.V.** Theoretical model and experimental diagnostics of nonlinear electrostatic structures in space plasma / A.V. Volosevich, C.-V. Meister // *Advances in Space Research*, 37. – P. 569-575, 2006.
2. **Volosevich, A.V.** Localized nonlinear electrostatic structures in magnetosphere / A.V. Volosevich, Yu.I. Galperin, F.M. Truhachev // *International Journal of Geomagnetism and Aeronomy*. – V. 4. – N 3. – P. 304-306, 2004.
3. **Savin, S.** Experimental study of nonlinear interaction of plasma flow with charged thin current sheets: 2. Hall dynamics, mass and momentum transfer S. Savin [et al.] // *Nonlinear. Processes Geophys.*, 13, 1–16, 2006.
4. **Volosevich, A.V.** Theoretical models of the spatially limited electrostatic structures and experiments in the auroral magnetosphere / A.V. Volosevich, Yu.I. Galperin, F.M. Truhachev // *Advances in Space Research*, 30, 7, 1677-1680, November, 2002.
5. **Волосевич, А.В.** Формирование нелинейных электростатических структур в авроральной магнитосфере / А.В. Волосевич. – *Веснік МДУ імя А.А. Куляшова*, 2006. – № 4. – С. 230-242.
6. Modulated electron acoustic waves in auroral density cavities: FAST observations / R. Pottelette [et al.]. *Geophys. Res. Lett.*, 26, 16, 2629-2632, 1999.