

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ "НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА" НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

Рассматривается система Льянара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x)$, $g(x)$ – полиномы степени 4 и 3 соответственно, $g'(0) > 0$. Если одно из состояний равновесия такой системы – антиседло, то возможны следующие комбинации особых точек: $2S+1A$, $2A+1S$, $1A$. Седло S можно поместить в точку $O(0,0)$, а антиседло A – в $E(1,0)$. Мы предлагаем метод построения систем (1) с четырьмя предельными циклами "нормального размера", окружающими одно состояние равновесия. Он основан на гипотезе Смейла, по которой число предельных циклов системы (1) равно числу положительных нулей функции $\varphi(u) = \bar{F}(u) - \bar{F}(-u)$, где $\bar{F}(u) = F(x(u))$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, а $x(u)$ – функция, обратная функции $u = \sqrt{2G(x)}\text{sign}(x)$, $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Этим же методом строятся системы (1) со следующими конфигурациями предельных циклов: $((2,2),0)$, $((2,0),1)$, $((0,2),1)$, $((1,0),2)$, $((0,1),2)$, $((2,1),1)$, $((0,0),3)$, $((1,1),2)$, $((2,2),1)$. Здесь набору $((i,j),k)$ соответствует следующее распределение: i предельных циклов вокруг левого антиседла, j – вокруг правого, k предельных циклов, окружающих все состояния равновесия.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается система Льянара вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g(x) - f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x) = \sum_{i=1}^5 a_i x^{i-1}$, а $g(x)$ – полином третьей степени. Если одна из особых точек такой системы – антиседло, то возможны следующие комбинации особых точек: $2S+1A$, $2A+1S$, $1A$. Здесь через $2A$ обозначено два антиседла, $1S$ – одно седло.

Кристофер и Ланч [1] установили, что максимальное число малоамплитудных предельных циклов для рассматриваемой системы равно четырем. Л.М. Перко [2] ввел термин "предельный цикл «нормального размера»", то есть предельный цикл, который можно обнаружить численными методами. Целью данной работы является оценка максимального числа предельных циклов "нормального размера" для систем (1) с учетом их различных конфигураций.

2. Предварительный результат. В работе [3] нами была рассмотрена система Льянара вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g(x) - f(x)y, \quad (2)$$

где $f(x) = \sum_{i=1}^5 a_i x^{i-1}$, а $g(x) = x(1-x)$. Для нее число предельных циклов

(с учетом гипотезы Смейла [4]) не превышает числа решений системы

$$F(x) = F(y), G(x) = G(y), x < 0, y > 0, \quad (3)$$

где $F(x) = \int_0^x f(z) dz, G(x) = \int_0^x g(z) dz$. Полученная система после введения

замены $x = py$ сводится к уравнению:

$$A_1 = \varphi_3(p) + A\varphi_4(p) + B\varphi_5(p). \quad (4)$$

В работе [3] доказана:

Теорема 1. Число решений уравнения (4) при $0 < p < 1$ не превышает трех. Метод доказательства этой теоремы используется в данной работе.

3. Оценка числа предельных циклов некоторых систем Льенара. Рассмотрим систему Льенара (1), в которой функция упругости $g(x)$ – полином третьей степени, а функция трения $f(x)$ – четвертой. Пусть одно из состояний равновесия такой системы – антиседло. Если система имеет три особые точки, то, поместив седло S в точку $E(-1, 0)$, а антиседло A – в $O(0, 0)$, систему можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1 + (1+L)x + Lx^2) - \sum_{j=1}^5 a_j x^{j-1} y, \quad (5)$$

где $L < 0$ или $0 < L < 1$.

Если седло S поместить в точку $O(0, 0)$, а антиседло A – в $E(1, 0)$, то система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - (1+M)x + Mx^2) - \sum_{j=1}^5 b_j x^{j-1} y, \quad (6)$$

где $M < 0$ или $0 < M < 1$.

Системы (5), (6) легко переводятся друг в друга. Например, преобразование $x = X+1, y = Y \cdot \sqrt{1-M}$ и растяжение шкалы времени систему (6) переводит в систему

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = -X \left(1 + X \left(1 + \frac{M}{M-1} \right) + \frac{M}{M-1} X^2 \right) - \sum_{j=1}^5 \frac{b_j}{\sqrt{1-M}} (X+1)^{j-1} Y, \quad (7)$$

которая при $L = \frac{M}{M-1}$ дает (5).

Систему Льенара, имеющую хотя бы одно антиседло, можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1 + x + Ux^2) - \sum_{j=1}^5 c_j x^{j-1} y. \quad (8)$$

Система (8) имеет антиседло $O(0,0)$, и если она еще имеет седло $E(x_0,0)$ при $x_0 < 0$, то преобразование $x = -x_0X + x_0$, $y = Y\sqrt{-x_0^3 - 2x_0^4U}$ приводит ее к системе

$$\frac{dX}{d\tau} = Y, \quad \frac{dY}{d\tau} = X \left(1 - \left(1 + \frac{Ux_0}{1+2x_0U} \right) X + \frac{Ux_0}{1+2x_0U} X^2 \right) - \sum_{j=1}^5 \frac{c_j}{-\sqrt{-x_0 - 2x_0^2U}} (-x_0X + x_0)^{j-1} Y,$$

имеющей вид (6).

Рассмотрим систему (6). Для исследования соответствующей ей системы (3) в области $0 < x < 1$, $y > 1$ введем замену $p = \frac{x}{y}$, после которой второе из уравнений в (3) примет вид

$$\frac{p+1}{2} - \frac{M+1}{3} (p^2 + p + 1)y + \frac{M}{4} (p^2 + p + 1)y^2 = 0.$$

Рассмотрим то из его решений относительно y , которое при $0 < p < 1$ удовлетворяет условию $y > 1$. Подставив найденное значение для y в первое равенство системы (3), получим уравнение относительно p . Обозначим в этом уравнении функции при коэффициентах b_i из (6) через $\varphi_i(p, M)$. В результате получим уравнение

$$b_1 + b_2\varphi_2(p, M) + b_3\varphi_3(p, M) + b_4\varphi_4(p, M) + b_5\varphi_5(p, M) = 0. \quad (9)$$

Можно показать, что $\varphi_2 - (M+1)\varphi_3 + M\varphi_4 = 0$. С учетом этого уравнение (9) приводится к виду

$$A_1 = \varphi_2 + A\varphi_3 + B\varphi_4, \quad (10)$$

где $A_1 = \frac{b_1}{-b_2 + \frac{b_4}{M}}$, $A = \frac{b_3 + \frac{b_4(1+M)}{M}}{b_2 - \frac{b_4}{M}}$, $B = \frac{b_5}{b_2 - \frac{b_4}{M}}$. Таким образом, по-

лучили четырехпараметрическое семейство уравнений относительно p . При каждом фиксированном значении M оно исследуется аналогично уравнению (4) для системы (2) в [3].

Однако для семейства уравнений (10) кривая $3LCP$ (рис. 1) может состоять из двух ветвей, пересекающихся в точке, соответствующей четырехкратному нулю уравнения (10). Рассмотрим систему (6) при значении M , равном 0,32, которое выбрано из тех соображений, что четвертая и третья фокусные величины для

фокуса $E(1,0)$ имеют разные знаки при $M \in \left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{11}} \right), \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{11}} \right) \right)$.

Теорема 2. Число решений уравнения (10) при $M = 0,32$ и $0 < p < 1$ не превышает четырех.

Доказательство: Для функции $f_0(p, A, B, M) = \varphi_2 + A\varphi_3 + B\varphi_4$ при $M = 0,32$ рассмотрим кривые $3LCP$, $WSCP$ – петли сепаратрис седла $O(0,0)$, а также кривую WF . Эти кривые, которые строятся так же, как и в [3], разбивают

плоскость (A, B) на семь областей, в каждой из которых функция f_0 имеет одинаковое число экстремумов при $0 < p < 1$. Их количество в каждой области изображено на рис. 1. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Непосредственно из теоремы получаем:

Следствие. Число предельных циклов системы (6) вокруг одного антиседла, в случае истинности гипотезы Смейла, не превышает четырех.

Пример 1. Система (6) с коэффициентами $b_1 = 0,06914088$; $b_2 = -4,477628$; $b_3 = 6,869463$; $b_4 = -3,2075127$; $b_5 = 0,7465372$, приведенными с точностью до семи знаков, и $M = 0,32$ имеет четыре предельных цикла, проходящих через точки $P_i(x_i, 0)$, $x_1 = 1,07$; $x_2 = 1,2$; $x_3 = 1,3$; $x_4 = 1,4$.

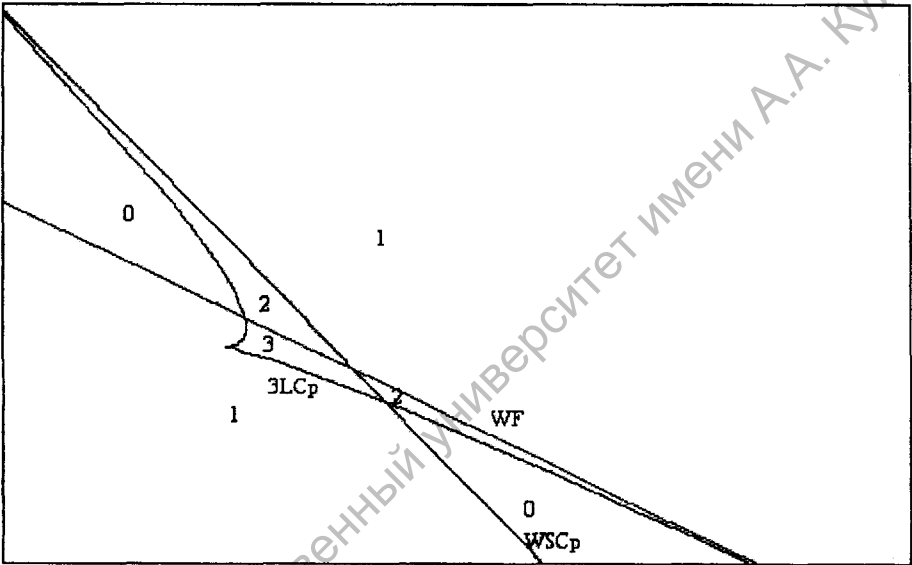


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что области с двумя и тремя экстремумами малы. При значе-

ниях, близких к $\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{11}} \right)$ и меньших этого числа, область с тремя экстремумами становится очень малой и исчезает при $M < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{11}} \right)$.

4. Конфигурации предельных циклов, окружающих антиседла. Представляет интерес рассмотрение различных распределений предельных циклов системы (6), окружающих антиседла $D(1/M, 0)$ и $E(1, 0)$ при $M < 0$.

При $M = -1$, $b_2 = b_4 = 0$ векторное поле системы (6) имеет центр симметрии в точке $O(0, 0)$. В этом случае легко найти систему с распределением предельных циклов (2, 2).

Пример 2. При $M = -1$, $b_2 = b_4 = 0$, $b_5 = 1$, $b_3 = -0,1$, $b_1 = -0,0006$ система (6) имеет два предельных цикла вокруг фокуса $E(1, 0)$, проходящие через точки $P_i(x_i, 0)$, $x_1 = 0,11$, $x_2 = 0,25$, и два цикла вокруг фокуса $D(-1, 0)$.

Можно легко получить системы (6) с распределениями (1, 2), (2, 1), (3, 0) и (0, 3). Распределений (3, 1) и (1, 3) получить не удалось.

5. Распределение предельных циклов вокруг всех особых точек. Рассмотрим распределение предельных циклов вокруг каждого антиседла и всех трех особых точек. Пусть в системе (6) $M < 0$, то есть она имеет два антиседла $D(1/M, 0)$, $E(1, 0)$ и седло $O(0,0)$. В этом случае можно отыскать систему с конфигурацией $((2, 1), 1)$ предельных циклов вокруг состояний равновесия. Здесь набору $((i,j),k)$ соответствует следующее распределение: i предельных циклов вокруг левого антиседла, j вокруг правого и k предельных циклов вокруг всех особых точек. Используя свойства функции $G(x)$, график которой изображен на рис. 2, заключаем, что предельным циклом, окружающим состояние равновесия $D(1/M, 0)$, соответствуют значения p из промежутка $(\omega_1, 0)$, для антиседла $E(1, 0)$ – значения $p \in (0, \omega_2)$, а предельным циклом, окружающим все особые точки, соответствуют значения $p \in (\omega_2, +\infty)$ (рис. 2).

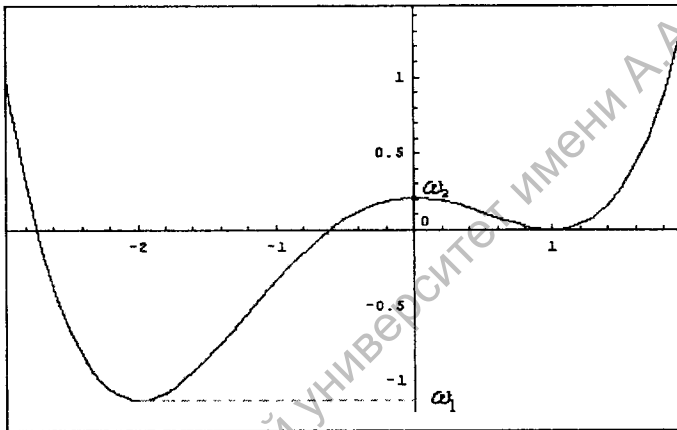


Рис. 2

Пример 3. При значениях $M = -1/2$, $b_1 = -0,239437$, $b_2 = 0,1$, $b_3 = 0,025$, $b_4 = 0,0742899$, $b_5 = 0,057493$ система (6) имеет два предельных цикла вокруг фокуса $D(-2, 0)$, один – вокруг фокуса $E(1, 0)$, один – окружающий все состояния равновесия. Они проходят через точки $M_i(x_i, 0)$, $x_1 = -0,8$, $x_2 = -0,2$, $x_3 = -1,4$, $x_4 = 1,7$ соответственно (рис. 3 а).

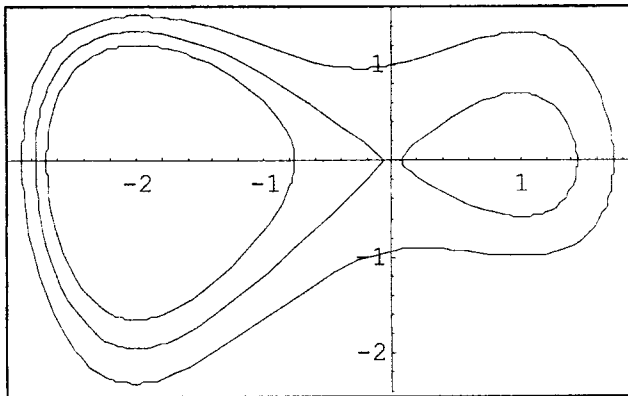


Рис. 3 а

Рассмотрим расположение предельных циклов вокруг всех трех особых точек. Предельным циклам, окружающим все особые точки, соответствуют значения $p \in (\omega_2, \pm\infty)$. Взяв в найденной области изменения p три различных значения $p_i, i = 1, 3$, можно найти b_i , при которых левая часть уравнения (9) обращается в ноль. Тем самым будет найдена система, у которой существует три предельных цикла, окружающих все состояния равновесия.

Пример 4. При значениях $M = -1/2$, $b_1 = 0,0365165$, $b_2 = 0,1$, $b_3 = -0,0304306$, $b_4 = 0,025$, $b_5 = 0,000181168$ система (6) имеет три предельных цикла вокруг трех особых точек; они проходят через точки $M_i(x_i, 0)$, $x_1 = 2,4$, $x_2 = 3,9$, $x_3 = 5,4$ (рис. 3 б).

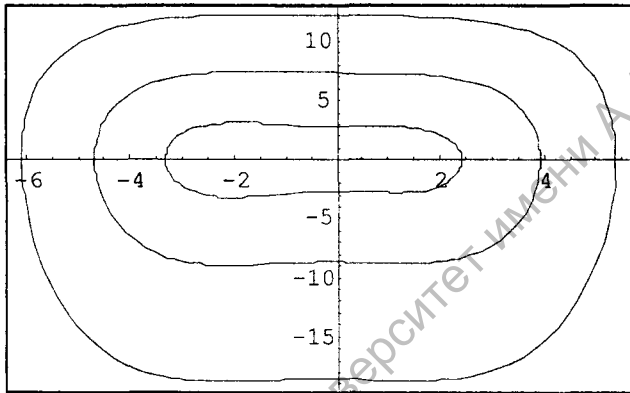


Рис. 3 б

Используя описанный выше метод, можно получить системы с распределениями $((2,0),1)$, $((0,2),1)$, $((1,0),2)$, $((0,1),2)$ предельных циклов вокруг особых точек. В случае, когда векторное поле системы (6) имеет центр симметрии в точке $O(0,0)$, можно найти системы с распределениями $((2,2),1)$, $((1,1),2)$.

Пример 5. При значениях $M = -1$, $b_1 = 0,03036658$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0,012399098$, $b_4 = 0$, $b_5 = -0,0423339$ система (6) имеет по два предельных цикла вокруг фокусов $D(-1, 0)$ и $E(1, 0)$ и один – окружающий все состояния равновесия (рис. 3 с).

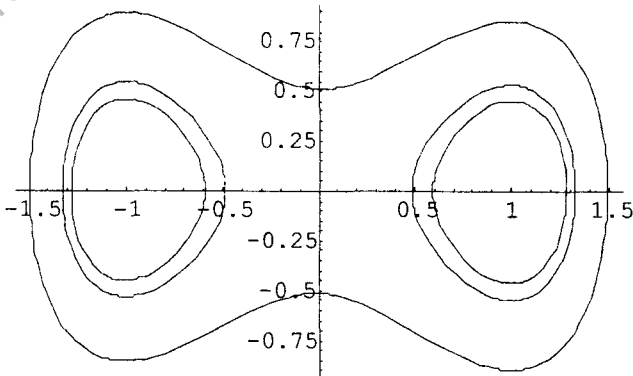


Рис. 3 с

Пример 6. При значениях $M = -1$, $b_1 = -0,0274907537$, $b_2 = b_4 = 0$, $b_3 = 0,045210121$ система (6) имеет по одному предельному циклу вокруг фокусов $D(-1, 0)$ и $E(1, 0)$ и два – окружающих все состояния равновесия (рис. 3 d).

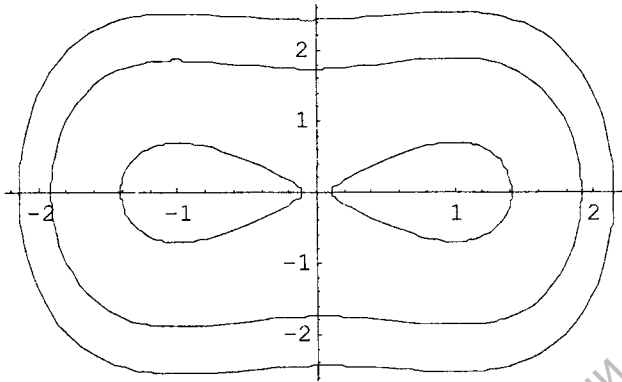


Рис. 3 d

6. Случай одного седла. Рассмотрим систему (8), имеющую одну ко-

нечную особую точку при $U > \frac{1}{4}$, прогноз ее предельных циклов осуществляет-

ся аналогично, за исключением того, что прогнозная кривая кратных сепаратрисных циклов не находится, так как сепаратрисные циклы связаны с особыми точками в бесконечности. Для прогноза предельных циклов конкретной системы можно найти приближенно обратные функции $x = x_u(u)$, $y = y_u(u)$ для функций $u = G(x)$, $x < 0$, $u = G(y)$, $y > 0$, при $0 < u < u_0$. Подставив их в выражение $(F(x) - F(y))/(x - y)$, получим функцию $f_0(u)$, линейно зависящую от c_i . Число ее нулей в $[0, u_0]$ определяет число предельных циклов системы в полосе $x_u(u_0) < x < y_u(u_0)$. Использование переменной u вместо p удобно тем, что функции $x_u(u)$, $y_u(u)$ существуют всегда, в то время как функции $\varphi_i(p)$ могут и не существовать.

Пример 7. Решив систему $f_0(u_i) = 0$ при $g = x(1 + x + x^2)$, $c_2 = 0,2$, $c_4 = 0,1$, $u_1 = 0,2$, $u_2 = 0,9$, $u_3 = 1,7$, получим $c_1 = 0,00151213$, $c_3 = 0,164972$, $c_5 = -0,026741$. Соответствующая система (8) имеет три предельных цикла, проходящие через точки $M_i(x_i, 0)$, $x_1 = 0,47$, $x_2 = 0,8$, $x_3 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Christopher, C.J.** Small-amplitude limit cycles bifurcation for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces / C.J. Christopher, S. Lurch // *Nonlinearity*. – 1999. – №12. – P.1099-1112.
2. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // *Math. Intelligencer*. – 1998. – Vol. 20, № 2. – P. 7-15.
3. **Perko, L.M.** // *Rocky Mountain of Mathematics*. – 1984. – V.14. – № 3. – P. 619-644.
4. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – Москва: Наука, 1967. – 488 с.
5. **Андронов, А.А.** Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Е. Хайкин. – М.: Физматгиз. – 916 с.

6. **Атаманов, П.С.** Аналитические и численные методы исследования предельных циклов динамических систем / П.С. Атаманов, В.П. Желтов. – Чебоксары: Наука, 1998. – 144 с.
7. **Баутин, Н.Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
8. **Черкас, Л.А.** Оценка числа предельных циклов систем Лъенара с двумя особыми точками / Л.А. Черкас, И.Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. – Могилев, 2006. – № 2-3(24). – С. 178-182.
9. **Эрроусмит, Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения: качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М.: Мир, 1986. – 288 с.

Поступила в редакцию 10.11.2006 г.