УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, И.В. КОМКОВ

СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ГОРДОНА С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В работе исследуется волновая система вида

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\gamma_n^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}=\sum_{j,s=1}^{2}R_{js}^{(n)}\left|u_j\right|^2u_s+\sum_{s=1}^{2}K_s^{(n)}u_s,\quad n=1,2,\tag{1}$$

где $\gamma_n^2>0$, $R_{js}^{(n)}$, $K_s^{(n)}$ – действительные числа, характеризующие среду распространения двух волн. Доказано, что солитонные решения системы (1) определяются корнями характеристического уравнения, которое строится по коэффициентам системы (1). В невырожденном случае максимальное число солитонов системы (1) равно восьми, что является новым результатом в теории солитонов. Выведены необходимые и достаточные условия существования солитонов, которые представляют собой алгебраические соотношения, связывающие параметры среды с параметрами солитонов. Их анализ позволяет получить полную и исчерпывающую информацию о распространении солитонов. С математической точки зрения предложенный метод исследования является обобщением классического метода Эйлера на системы второго порядка связанных уравнений Клейна-Гордона с керровской нелинейностью. Полученные результаты представляют интерес для нелинейной оптики и лазерной физики, а также для решения задач обработки и передачи информации.

Введение. Известно [1-10], что уравнения Клейна-Гордона широко используются для описания процессов распространения возмущений в сплошных средах. В качестве примера можно привести знаменитое уравнение sin-Gordon [11] и его многомерные модификации [12]. В последние десятилетия разработаны многочисленные методы исследования солитонных решений [13, 14], позволяющие строить новые формы решений нелинейных уравнений в частных производных. В отличие от известных подходов в монографии [12] развит прямой метод построения солитонных решений нелинейных систем в частных производных с произвольными коэффициентами. Он позволяет найти необходимые и достаточные условия существования солитонов различной формы и, тем самым, получить полную и исчерпывающую информацию не только о распространении солитонов, но и параметрах среды, в которой происходит процесс распространения. В настоящей работе исследуются системы связанных уравнений Клейна-Гордона второго порядка с керровской нелинейностью, представляющие интерес для нелинейной оптики и лазерной физики.

I. Рассмотрим волновую систему вида

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-\gamma_n^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}=\sum_{j,s=1}^{2}R_{js}^{(n)}\left|u_j\right|^2u_s+\sum_{s=1}^{2}K_s^{(n)}u_s,\quad n=1,2,\tag{1}$$

где $\gamma_n^2 > 0$, $R_{js}^{(n)}$, $K_s^{(n)}$ – действительные числа, характеризующие среду распространения двух волн, $K_1^{(2)}$, $K_2^{(1)}$ – характеризуют линейную связь между волнами. Решение системы (1) строится в виде

$$u_n(t,x) = v_n(\xi)\exp\{i(k_0 t + k_1 x + \psi)\}, \qquad \xi \equiv \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \varphi, k_0, k_1, \psi$ – действительные параметры солитонов, $v_n(\xi)$ – неизвестные функции. Подставляя (2) в (1), найдем

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2 = (k_0\alpha)/(k_1\beta), \tag{3}$$

$$v_n''(\xi) = \delta v_n(\xi) + \sum_{j,s=1}^{2} Q_{js}^{(n)} v_j^2(\xi) v_s(\xi) + \sum_{s=1}^{2} P_s^{(n)} v_s(\xi), \qquad n = 1, 2, \tag{4}$$

$$\delta \equiv \frac{k_0^2 - \gamma^2 k_1^2}{\alpha^2 - \gamma^2\beta^2}, \qquad Q_{js}^{(n)} \equiv \frac{R_{js}^{(n)}}{\alpha^2 - \gamma^2\beta^2}, \qquad P_s^{(n)} \equiv \frac{K_s^{(n)}}{\alpha^2 - \gamma^2\beta^2}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) имела решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (3), (4).*

Система (4) допускает решения в замкнутой форме в зависимости от краевых условий на бесконечности. Рассмотрим случай, когда

$$v_n(-\infty) = 0, \qquad v_n(+\infty) = 0, \qquad n = 1, 2. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) строится в виде

$$v_n(\xi) = A_n ch^{-1}(\xi), \qquad n = 1, 2, \tag{6}$$

где A_n – неизвестные амплитуды солитонов. Подставляя (6) в (4), получим:

$$a)\ \sum_{j,s=1}^{2} Q_{js}^{(n)} A_j^2 A_s = -2A_n, \qquad b)\ \sum_{s=1}^{2} P_s^{(n)} A_s = (1-\delta)A_n, \qquad n = 1, 2. \tag{7}$$

Теорема 2. *Для того чтобы система (4) имела решение (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (7).*

Интересно отметить, что соотношения (7) обеспечивают существование разрывного в точке $\xi = 0$ решения вида

$$v_n(\xi) = A_n sh^{-1}(\xi), \qquad n = 1, 2.$$

Изучим эти соотношения. Для этого обозначим $A_1/A_2 \equiv \theta$. Тогда система (7*a*) примет вид

$$\begin{cases} Q_{11}^{(1)}\theta^3 + Q_{12}^{(1)}\theta^2 + Q_{21}^{(1)}\theta + Q_{22}^{(1)} = -2\dfrac{\theta}{A_2^2}, \\ Q_{11}^{(2)}\theta^3 + Q_{12}^{(2)}\theta^2 + Q_{21}^{(2)}\theta + Q_{22}^{(2)} = -\dfrac{2}{A_2^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Преобразуем систему (8). Для этого разделим первое уравнение на второе. Тогда получим

$$P_4(\theta) \equiv Q_{11}^{(2)}\theta^4 + \theta^3\left(Q_{12}^{(2)} - Q_{11}^{(1)}\right) + \theta^2\left(Q_{21}^{(2)} - Q_{12}^{(1)}\right) + \theta\left(Q_{22}^{(2)} - Q_{21}^{(1)}\right) - Q_{22}^{(1)} = 0, \quad (9)$$

$$Q_{11}^{(2)}\theta^3 + Q_{12}^{(2)}\theta^2 + Q_{21}^{(2)}\theta + Q_{22}^{(2)} = -\frac{2}{A_2^2}. \quad (10)$$

Следовательно, вопрос о существовании солитонов системы (1) сводится к вопросу о существовании корней характеристического уравнения (9), которое представляет собой полином четвертого порядка. Если $Q_{11}^{(2)} \neq 0$, то полином $P_4(\theta)$ может иметь четыре различных корня $\theta^{(i)}$. Поэтому подставляя их поочередно в уравнение (10), можно определить амплитуду A_2^2 в зависимости от $\theta^{(i)}$:

$$A_2^2 = -2\Big/\left[Q_{11}^{(2)}\left\{\theta^{(i)}\right\}^3 + Q_{12}^{(2)}\left\{\theta^{(i)}\right\}^2 + Q_{21}^{(2)}\left\{\theta^{(i)}\right\} + Q_{22}^{(2)}\right],$$

а значит и амплитуду $A_1 = \theta^{(i)}A_2$. Без ограничения общности можно считать, что $A_1 > 0, A_2 > 0$. Следовательно, каждому положительному корню уравнения $P_4(\theta) = 0$ соответствует пара амплитуд A_1, A_2. Поэтому максимальное число солитонов системы (1) вида (2), (6) в невырожденном случае (т.е. при $Q_{11}^{(2)} \neq 0$) равно восьми.

Систему (7*b*) можно переписать в виде

$$P_1^{(1)}\theta + P_2^{(1)} = (1-\delta)\theta, \qquad P_1^{(2)}\theta + P_2^{(2)} = (1-\delta).$$

Из нее можно определить коэффициенты $P_2^{(1)}, P_1^{(2)}$ линейной связи между солитонами в зависимости от корней $\theta^{(i)}$. Имеем

$$P_2^{(1)} = \left(1 - \delta - P_1^{(1)}\right)\theta^{(i)}, \qquad P_1^{(2)} = \left(1 - \delta - P_2^{(2)}\right)\Big/\theta^{(i)}. \quad (11)$$

Таким образом, система (1) представляет собой математическую модель устройства, способного выделить одну определенную пару солитонов из четырех возможных, если осуществить линейное взаимодействие между солитонами по формуле (11). Тогда система (1) может работать как фильтр или логическое устройство на солитонах.

Рассмотрим частный случай системы (1) с менее сложным законом нелинейного взаимодействия

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \gamma_n^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \left(\sum_{j=1}^{2} R_j^{(n)}\left|u_j\right|^2\right)u_n + \sum_{s=1}^{2} K_s^{(n)}u_s, \qquad n = 1, 2. \quad (12)$$

В этом случае справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы система (12) имела решение вида*

$$u_n(t,x) = A_n ch^{-1}(\xi)e^{i(k_0t + k_1x + \psi)}, \qquad n = 1, 2, \quad (13)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дисперсионные соотношения:

$$\gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma^2=\frac{k_0\alpha}{k_1\beta},$$

$$a)\ \sum_{j=1}^{2}Q_j^{(n)}A_j^2=-2,\qquad b)\ \sum_{s=1}^{2}P_s^{(n)}A_s=(1-\delta)A_n,\qquad n=1,2. \tag{14}$$

$$\delta\equiv\frac{k_0^2-\gamma^2k_1^2}{\alpha^2-\gamma^2\beta^2},\qquad Q_j^{(n)}\equiv\frac{R_j^{(n)}}{\alpha^2-\gamma^2\beta^2},\qquad P_s^{(n)}\equiv\frac{K_s^{(n)}}{\alpha^2-\gamma^2\beta^2}.$$

Изучим эти соотношения. Система (14*a*) является линейной относительно A_1^2, A_2^2. Поэтому, если $\det Q_j^{(n)}\neq 0$, то она имеет единственное решение

$$A_1^2=\frac{2\left(Q_2^{(1)}-Q_2^{(2)}\right)}{Q_1^{(1)}Q_2^{(2)}-Q_1^{(2)}Q_2^{(1)}},\qquad A_2^2=\frac{2\left(Q_1^{(2)}-Q_1^{(1)}\right)}{Q_1^{(1)}Q_2^{(2)}-Q_1^{(2)}Q_2^{(1)}},$$

при условии, что

$$\frac{Q_2^{(1)}-Q_2^{(2)}}{Q_1^{(1)}Q_2^{(2)}-Q_1^{(2)}Q_2^{(1)}}>0,\qquad \frac{Q_1^{(2)}-Q_1^{(1)}}{Q_1^{(1)}Q_2^{(2)}-Q_1^{(2)}Q_2^{(1)}}>0. \tag{15}$$

Неравенства (15) накладывают ограничения на выбор коэффициентов $R_j^{(n)}$. Подставляя найденные значения A_1, A_2 в систему (14*b*), определим коэффициенты связи

$$P_2^{(1)}=A_2^{-1}\left(1-\delta-P_1^{(1)}\right)A_1,\qquad P_1^{(2)}=A_1^{-1}\left(1-\delta-P_2^{(2)}\right)A_2.$$

В этом случае система (12) имеет единственное решение вида (13) с однозначно определенными амплитудами A_1, A_2.

II. Рассмотрим случай, когда решение системы (4) имеет вид

$$v_n(\xi)=A_n th\xi,\qquad n=1,2. \tag{16}$$

В этом случае имеем

$$v_n(-\infty)=-A_n,\qquad v_n(+\infty)=A_n,\qquad n=1,2.$$

Подставляя (16) в (4), получим

$$a)\ \sum_{j,s=1}^{2}Q_{js}^{(n)}A_j^2A_s=2A_n,\qquad b)\ \sum_{s=1}^{2}P_s^{(n)}A_s=(-2-\delta)A_n,\qquad n=1,2. \tag{17}$$

Теорема 4. *Для того чтобы система (4) имела решение вида (16) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (17).*

Интересно отметить, что соотношения (17) обеспечивают существование разрывного в точке $\xi=0$ решения вида

$$v_n(\xi)=A_n th^{-1}(\xi),\qquad n=1,2.$$

Система (17а) приводится к виду

$$P_4(\theta)=0, \quad A_2^2 = 2\Big/\left\{Q_{11}^{(2)}\theta^3 + Q_{12}^{(2)}\theta^2 + Q_{21}^{(2)}\theta + Q_{22}^{(2)}\right\}, \quad \left(\theta \equiv \frac{A_1}{A_2}\right).$$

Это значит, что амплитуды A_1, A_2 решения (16) определяется корнями характеристического уравнения (9). Поэтому максимальное число солитонов системы (1) вида (2), (16) в невырожденном случае равно восьми. Из системы (17*b*) можно определить коэффициенты линейной связи между солитонами в зависимости от корней характеристического уравнения. Имеем

$$P_2^{(1)} = -\left(2+\delta+P_1^{(1)}\right)\theta^{(i)}, \quad P_1^{(2)} = -\left(2+\delta+P_2^{(2)}\right)\Big/\theta^{(i)}. \tag{18}$$

Таким образом, система (12) может работать как фильтр или логическое устройство, в зависимости от линейного взаимодействия между солитонами, определяемого формулами (18).

Теорема 5. *Для того чтобы система (12) имела решение вида*

$$u_n(t,x) = A_n th(\xi) e^{i(k_0 t + k_1 x + \psi)}, \quad n=1,2, \tag{19}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дисперсионные соотношения:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2 = \frac{k_0\alpha}{k_1\beta},$$

$$a)\ \sum_{j=1}^{2} Q_j^{(n)} A_j^2 = 2, \quad b)\ \sum_{s=1}^{2} P_s^{(n)} A_s = (-2-\delta)A_n, \quad n=1,2. \tag{20}$$

$$\delta \equiv \frac{k_0^2 - \gamma^2 k_1^2}{\alpha^2 - \gamma^2\beta^2}, \quad Q_j^{(n)} \equiv \frac{R_j^{(n)}}{\alpha^2-\gamma^2\beta^2}, \quad P_s^{(n)} \equiv \frac{K_s^{(n)}}{\alpha^2-\gamma^2\beta^2}.$$

Анализ уравнений (20) не вызывает затруднений и проводится также, как уравнений (14).

III. Рассмотрим случай, когда решение системы (4) имеет вид

$$v_n(\xi) = A_n\left(d_0 + d_1 e^{\xi} + d_2 e^{-\xi}\right)^{-1/2}, \quad n=1,2, \tag{21}$$

где $d_0>0, d_1>0, d_2>0$ – неизвестные параметры. В этом случае имеем

$$v_n(-\infty)=0, \quad v_n(+\infty)=0, \quad n=1,2.$$

Подставляя (21) в (4), получим

$$a)\ \sum_{j,s=1}^{2} Q_{js}^{(n)} A_j^2 A_s = -d_0 A_n, \quad b)\ \sum_{s=1}^{2} P_s^{(n)} A_s = \left(\frac{1}{4}-\delta\right)A_n, \quad n=1,2, \tag{22}$$

$$d_0^2 = 4d_1 d_2. \tag{23}$$

Теорема 6. *Для того чтобы система (4) имела решение вида (21) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (22), (23).*

Система (22*a*) приводится к виду

$$P_4(\theta)=0, \quad A_2^2 = -d_0 \Big/ \left\{Q_{11}^{(2)}\theta^3 + Q_{12}^{(2)}\theta^2 + Q_{21}^{(2)}\theta + Q_{22}^{(2)}\right\}, \quad \left(\theta \equiv \frac{A_1}{A_2}\right).$$

Это значит, что амплитуды A_1, A_2 решения (21) определяются корнями характеристического уравнения (9). Поэтому максимальное число солитонов системы (1) вида (2), (21) в невырожденном случае равно восьми. Из системы (22*b*) можно определить коэффициенты линейной связи между солитонами в зависимости от корней характеристического уравнения. Имеем

$$P_2^{(1)} = \left(\frac{1}{4} - \delta - P_1^{(1)}\right)\theta^{(i)}, \quad P_1^{(2)} = \left(\frac{1}{4} - \delta - P_2^{(2)}\right)\Big/\theta^{(i)}. \tag{24}$$

Таким образом, система (1) может работать как фильтр или логическое устройство, в зависимости от линейного взаимодействия между солитонами, определяемого формулами (24).

Рассмотрим систему (12). Для нее справедлива

Теорема 7. *Для того чтобы система (12) имела решение вида*

$$u_n(t,x) = A_n\left(d_0 + d_1 e^{\xi} + d_2 e^{-\xi}\right)^{-1/2} e^{i(k_0 t + k_1 x + \psi)}, \quad n = 1, 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дисперсионные соотношения:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2 = \frac{k_0\alpha}{k_1\beta},$$

$$a)\ \sum_{j=1}^{2} Q_j^{(n)} A_j^2 = -d_0, \quad b)\ \sum_{s=1}^{2} P_s^{(n)} A_s = \left(\frac{1}{4} - \delta\right) A_n, \quad n = 1, 2, \tag{25}$$

$$d_0^2 = 4 d_1 d_2.$$

Анализ уравнений (25) не вызывает затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Makhankov, V.G.*** Computer experiments in soliton theory / V.G. Makhankov // Comp. Phys. Comm. – 1980. – Vol. 21. – P. 1-49.
2. ***Додд, Р.*** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М: Мир, 1988. – 694 с.
3. ***Keel, M.*** Small data blow-up for semilinear Klein-Gordon / M. Keel, T.Tao // Amer. J. Math. – 1999. – Vol. 121. – N 3. – P. 629-669.
4. ***Leis, R.*** Variations on the wave equation / R. Leis // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 24. – N 6. – P. 339-367.
5. ***Asao, Arai.*** Exact solutions of multi-component nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon equations in two-dimensional space-time / Arai Asao // J. Math. A: Math. Gen. – 2001. – Vol. 34. – P. 4281-4288.
6. ***Lin, Tian-gui.*** Perturbation theory for nonlinear Klein-Gordon equation / Tian-gui Lin, Jia-ren Yan // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2002. – Vol. 23. – N 8. – P. 987-992.

7. ***Masmoudi, N.*** From nonlinear Klein-Gordon equation to a system of coupled nonlinear Schrodinger equations / N. Masmoudi, K. Nakanishi // Math. Ann. – 2002. – Vol. 324. – N 2. – P. 359-389.
8. ***Wazwaz, Abdul-Majid.*** Solutions of compact and noncompact structures for nonlinear Klein-Gordon-type equation / Abdul-Majid Wazwaz // Appl. Math. and Comput. – 2003. – Vol. 134. – N 2-3. – P. 487-500.
9. ***Chen, Yu-zhi.*** A sufficient condition for the existence of global solutions to coupled nonlinear Klein-Gordon equation / Yu-zhi Chen, Xiao-qiang Zhang // J. Sichuan Norm. Univ. Natur: Sci. – 2004. – Vol. 27. – N 5. – P. 486-488.
10. ***Alagesan, T.*** Soliton solutions of coupled nonlinear Klein-Gordon equations / T. Alagesan [и др.] // Chaos, Solitons and Fractals. – 2004. – Vol. 21. – P. 879-882.
11. ***Жестков, С.В.*** О многомерном варианте метода Хироты для уравнения sin-Gordon / С.В. Жестков, В.И. Кувшинов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 3. – С. 86-90.
12. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
13. ***Ахмедиев, Н.Н.*** Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М: Физматлит, 2003. – 304 с.
14. ***Кившарь, Ю.С.*** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М: Физматлит, 2005. – 684 с.

Поступила в редакцию 22.03.2007 г.