УДК 537.8

И.Е. АНДРУШКЕВИЧ, Ю.В. ШИЕНОК

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

На конкретном примере решения трехмерной задачи о распространении волн в продольно однородной структуре треугольного сечения предложен новый подход к решению задачи построения аналитических решений уравнений прикладной электродинамики, основанный на использовании матричного представления системы уравнений Максвелла и применения к ней алгебраического метода разделения переменных, разработанного ранее применительно к исследованию матричного уравнения Дирака при наличии гравитационных и векторных полей. Результаты вычислений полностью согласуются с результатами, полученными с использованием обобщенного метода Фурье.

1. Введение

Проблема поиска аналитических решений уравнений Максвелла по-прежнему актуальна. При традиционном подходе на начальном этапе получают волновые уравнения для полевых векторов. Сама процедура построения волновых уравнений оказывается трудоемкой и в общем случае решения не имеет; успех данной процедуры полностью зависит от физических параметров конкретной задачи. В [1] осуществлена попытка классификации сред, в которых возможно выделение независимых уравнений для электрической и магнитной составляющей электромагнитного поля.

Вместе с тем, теория хорошо известного и изученного матричного уравнения Дирака, в котором в качестве неизвестных функций фигурируют четыре компоненты биспинора, вполне обходится при построении аналитических решений без получения волновых уравнений для каждой из четырех искомых функций.

В настоящей работе на конкретном примере, на основе использования матричного представления системы уравнений Максвелла [2; 3] и без использования волновых уравнений для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ мы получаем точное аналитическое решение одной из задач прикладной электродинамики.

2. Матричное представление системы уравнений Максвелла

Система уравнений Максвелла в матричном представлении имеет вид [2; 3]

$$\left\{\xi^1\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2\frac{\partial}{\partial y}+\xi^3\frac{\partial}{\partial z}+\xi^4\mathbf{M}\frac{\partial}{\partial t}+\Theta\right\}\Phi=\mathbf{P}\mathbf{J}, \qquad (1)$$

где

$$\mathbf{M}=diag\left(\varepsilon/\mu,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\mu,\mu,\mu,\mu/\varepsilon\right),\ \mathbf{P}=diag\left(0,0,0,0,0,0,\rho/\varepsilon,0\right),$$

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}
0 & -\sigma-\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial z} & \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} & \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\sigma-\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \sigma+\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial\mu}{\partial t} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial\mu}{\partial t} & 0 & 0 & 0\\
0 & \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} & \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} & -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial\mu}{\partial t} & 0
\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}=[1,1,1,1,1,1,1,1],\quad \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}=[0,E_X,E_Y,-E_Z,-H_Z,H_Y,H_X,0].$$

Здесь ξ^i – элементарные матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие соотношениям:

$$[\xi^i,\xi^j]_+=\xi^i\xi^j+\xi^j\xi^i=2g^{ij}\mathbf{I};\ i,j=1,2,3,4,5,6:\ g^{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}, i=1,2,3,6,\\ -\delta_{ij}, i=4,5,\end{cases}$$

$$\mathbf{I}=diag(1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Известно [4], что явный вид матриц ξ^i принципиального значения не имеет; более того, любая матрица 8×8 может быть единственным образом представлена как линейная комбинация следующих 64 матриц:

$$\mathbf{I},\ \xi^1\xi^3\xi^5,\ \xi^1\xi^4\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4,\ \xi^2\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^4\xi^5,\ \xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^4,$$
$$\xi^1\xi^6,\ \xi^2\xi^3,\ \xi^1\xi^2\xi^5,\ \xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^6,\ \xi^5,\ \xi^1\xi^3,\ \xi^2\xi^6,$$
$$\xi^1\xi^2\xi^4,\ \xi^3\xi^4\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^5\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2,\ \xi^3\xi^6,\ \xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^3\xi^4,\ \xi^1\xi^5\xi^6,$$
$$\xi^2\xi^3\xi^5,\ \xi^2\xi^4\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^2,\ \xi^3\xi^4,\ \xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^5,$$
$$\xi^1\xi^2\xi^4\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^3,\ \xi^1\xi^5,\ \xi^2\xi^4,\ \xi^1\xi^2\xi^6,\ \xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^6,$$
$$\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^6,\ \xi^1\xi^4,\ \xi^2\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3,\ \xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^6,$$
$$\xi^1\xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1,\ \xi^3\xi^5,\ \xi^2\xi^6,\ \xi^3\xi^3\xi^6,\ \xi^2\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4,\ \xi^1\xi^2\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6.$$

Для сокращения записей эти матрицы обозначим, как $\mathbf{\Gamma}^i, i=\overline{0,63}$, $\mathbf{\Gamma}^0=\mathbf{I}$; будем также использовать по мере необходимости следующее представление конкретных матриц

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ \xi^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\xi^3 = -\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ \xi^4 = \begin{bmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (1) преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\widetilde{\mathbf{R}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial\widetilde{\mathbf{R}}_i}{\partial x_i}\right)\right)\xi^i\mathbf{\Phi}=\mathbf{P}^{\Gamma}\mathbf{J}, \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{\Phi}=\left[0,E_{X_1},E_{X_2},-E_{X_3},-H_{X_3},H_{X_2},H_{X_1},0\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{P}^{\Gamma}=diag(0,0,0,0,0,0,\rho,0),$$

$$\mathbf{J}=[1,1,1,1,1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\ \widetilde{\mathbf{R}}_1=diag(\mu,\mu,1,1,1,1,\varepsilon,\varepsilon),\ \widetilde{\mathbf{R}}_2=diag(1,\mu,1,\mu,\varepsilon,1,\varepsilon,1),$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_3=diag(1,\mu,\mu,1,1,\varepsilon,\varepsilon,1),\ \widetilde{\mathbf{R}}_4=diag(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\mu,\mu,\mu,\mu),$$

$$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=t.$$

Уравнения Максвелла, записанные в форме (2), мы и будем использовать.

3. Постановка задачи

Задача полого волновода треугольного сечения представляет собой трехмерную задачу о распространении волн в продольно однородной структуре, оболочка которой принимается идеально проводящей, а внутренняя среда однородной. Решение данной задачи классическим способом, используя волновые уравнения, оказалось возможным только с использованием обобщенного метода разделения переменных Фурье [4]. Результаты, полученные в [4], показывают наличие в волноводе связанных волн, суперпозиция которых удовлетворяет граничным условиям.

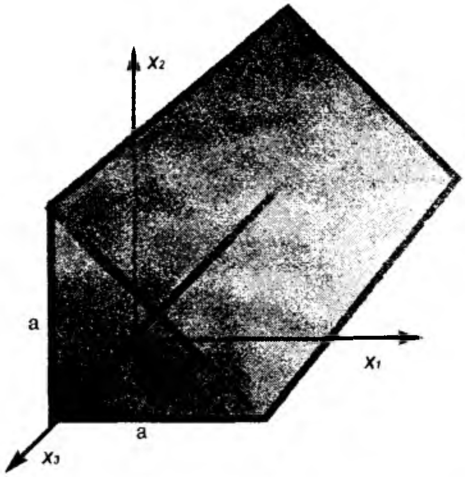

Рис. 1. Полый волновод треугольного сечения

Рассмотрим возможность решения данной нетривиальной задачи, находясь только в рамках матричного представления. Уравнение (2) применительно к условиям задачи можно упростить:

$$\sum_{i=1}^{4} \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{\Phi} = 0. \qquad (3)$$

Согласно (3), в однородной структуре матричный оператор, действующий на функциональный вектор-столбец $\mathbf{\Phi}$, представляется в виде суммы дифференциальных операторов от соответствующих переменных.

При решении уравнения (3) мы будем использовать алгебраический метод разделения переменных и его вариации [5-7]. Для этого представим вектор-столбец в виде произведения квадратной матрицы на единичный квадроспинор $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_{1234} \mathbf{J}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{\Phi}_{1234}$ – матрица размерности восемь на восемь, тут и в дальнейшем нижние индексы соответствуют переменным, от которых зависит функциональная матрица.

Для уравнения Дирака было показано [8], что получаемое решение определяется порядком отделения переменных. Согласно [8], наиболее общее решение получается при последовательном отделении переменных.

Так как продольная структура является однородной в направлении x_3, то целесообразным представляется первоочередное отделение переменных x_4 и x_3.

3.1. Отделение переменной x_4. Предположим, что решение $\mathbf{\Phi}_{1234}$ можно представить в виде произведения двух неизвестных функциональных матриц разных аргументов: $\mathbf{\Phi}_{1234} = \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{\Phi}_{123}$. В результате подстановки этого представления, с учетом (4), в (3) получаем:

$$\sum_{i=1}^{4} \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{\Phi}_{123} \mathbf{J} = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) в нетривиальном случае, приводятся к двум независимым уравнениям при выполнении требований, накладываемых алгебраическим методом разделения переменных [9]:

$$\left[\mathbf{\Phi}_4, \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i\right] = 0, \text{при}\, i = \overline{1..3}. \tag{6}$$

При этом уравнение для переменной x_4 примет вид:

$$\mathbf{\Phi}_4^{-1} \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4 \frac{\partial}{\partial x_4} \mathbf{\Phi}_4 = \mathbf{K}_4, \tag{7}$$

здесь матрица $\mathbf{K}_4$ является константой разделения.

Используя разложение матрицы $\mathbf{\Phi}_4$ в базисе $\mathbf{\Gamma}^i, i = \overline{0,63}$, запишем решение (7), с учетом ограничений (6):

$$\mathbf{\Phi}_4 = f_0^4 \cdot \mathbf{\Gamma}^0 = C_1^4 e^{k_4 x_4} \mathbf{\Gamma}^0, \tag{8}$$

$$\mathbf{K}_4 = k_4 \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4.$$

Однако заметим, что здесь, как и в [8] требование коммутирования $\mathbf{\Phi}_4$ с оператором $\sum_{i=1}^{3} \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является избыточным. Положим $\mathbf{\Phi}_4$ в виде $\mathbf{\Phi}_4 = \mathbf{\Phi}_4^K + \mathbf{\Phi}_4^A$.

Тогда отделение переменной x_4 возможно также в случае выполнения следующих требований: $\left[\mathbf{\Phi}_4^K, \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i\right] = 0$ и $\left[\mathbf{\Phi}_4^A, \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i\right]^+ = 0, \text{при}\, i = \overline{1..3}$.

В этом случае решение будет представляться в виде суммы:

$$\mathbf{\Phi}_4 = f_0^4 \cdot \mathbf{\Gamma}^0 + f_{44}^4 \cdot \mathbf{\Gamma}^0 = (C_1^4 e^{(k_{41}+k_{42})x_4} + C_2^4 e^{(k_{41}-k_{42})x_4})\mathbf{\Gamma}^0 +$$
$$+ (C_1^4 e^{(k_{41}+k_{42})x_4} - C_2^4 e^{(k_{41}-k_{42})x_4})\mathbf{\Gamma}^{44},$$

где $\mathbf{K}_4 = k_{41} \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4 + k_{42} \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4 \mathbf{\Gamma}^{44}$.

3.2. Отделение переменной x_3. Уравнение (5) после отделения переменной x_4 примет вид:

$$\mathbf{\Phi}_4 \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \mathbf{K}_4 \right) \mathbf{\Phi}_{123} \mathbf{J} = 0. \tag{9}$$

По аналогии с предыдущим пунктом, представим $\mathbf{\Phi}_{123}$ в виде произведения $\mathbf{\Phi}_{123} = \mathbf{\Phi}_3 \mathbf{\Phi}_{12}$. Требование коммутирования в этом случае будет иметь вид:

$$\left[\mathbf{\Phi}_3, \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i\right] = 0, \text{при}\, i = \overline{1..2}, \ \left[\mathbf{\Phi}_3, \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4\right] = 0. \tag{10}$$

Из (9), с учетом требований (10), можно записать уравнение для переменной x_3:

$$\mathbf{\Phi}_3^{-1} \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{\Phi}_3 = \mathbf{K}_3. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) получается в виде:

$$\mathbf{\Phi}_3 = f_0^3 \cdot \mathbf{\Gamma}^0 = C_1^3 e^{k_3 x_3} \mathbf{\Gamma}^0, \tag{12}$$

$$\mathbf{K}_3 = k_3 \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3.$$

Требования (10) на вид матрицы $\mathbf{\Phi}_3$, как и в предыдущем пункте, можно считать избыточными, отказавшись от требования коммутирования можно представить матрицу $\mathbf{\Phi}_3$ в виде суммы коммутирующей и антикоммутирующей матриц.

Выбор матричного оператора от переменных x_1, x_2, с учетом разложения матрицы $\mathbf{K}_4$ в базисе $\mathbf{\Gamma}^i$, в виде $\sum_{i=1}^{2} \widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ является неединственным.

Поиск всех возможных путей решения матричной записи уравнений Максвелла не является целью данной статьи. Для решения задачи полого волновода треугольного сечения достаточно (12). Отметим, что записанная в (12) величина k_3 соответствует продольному волновому числу, получаемому при решении уравнения Гельмгольца.

3.3. Разделение переменных x_1 и x_2. Завершающим этапом разделения переменных является разделение переменных x_1 и x_2. Уравнение (3) после отделения переменных x_4 и x_3 будет иметь вид:

$$\mathbf{\Phi}_4 \mathbf{\Phi}_3 \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\widetilde{\mathbf{R}}_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \right) \mathbf{\Phi}_{12} \mathbf{J} = 0. \tag{13}$$

Так как направления x_1 и x_2 равноправны, решение (13) представим в виде суммы произведений матриц соответствующих переменных:

$$\mathbf{\Phi}_{12} = \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}'_1 \mathbf{\Phi}'_2.$$

С учетом этого уравнение (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_4 \mathbf{\Phi}_3 \left(\widetilde{\mathbf{R}}_1 \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \widetilde{\mathbf{R}}_2 \xi^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \right) \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{J} + \\ &+ \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{\Phi}_3 \left(\widetilde{\mathbf{R}}_1 \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \widetilde{\mathbf{R}}_2 \xi^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \right) \mathbf{\Phi}'_1 \mathbf{\Phi}'_2 \mathbf{J} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Представим $\mathbf{\Phi}_2$ и $\mathbf{\Phi}`_1$ в виде суммы двух матриц $\mathbf{\Phi}_2^K$, $\mathbf{\Phi}_2^A$ и $\mathbf{\Phi}`_1^K$, $\mathbf{\Phi}`_1^A$, соответственно. Пусть для матриц $\mathbf{\Phi}_2^K$, $\mathbf{\Phi}_2^A$ и $\mathbf{\Phi}`_1^K$, $\mathbf{\Phi}`_1^A$ справедлив следующий набор требований:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{\Phi}_2^K, \widetilde{\mathbf{R}}_1 \xi^1\right] = 0, \left[\mathbf{\Phi}_2^K, \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3\right] = 0, \left[\mathbf{\Phi}_2^K, \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4\right] = 0, \\ &\left[\mathbf{\Phi}_2^A, \widetilde{\mathbf{R}}_1 \xi^1\right]^+ = 0, \left[\mathbf{\Phi}_2^A, \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3\right]^+ = 0, \left[\mathbf{\Phi}_2^A, \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4\right]^+ = 0, \\ &\left[\mathbf{\Phi}`_1^K, \widetilde{\mathbf{R}}_2 \xi^2\right] = 0, \left[\mathbf{\Phi}`_1^K, \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3\right] = 0, \left[\mathbf{\Phi}`_1^K, \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4\right] = 0, \\ &\left[\mathbf{\Phi}`_1^A, \widetilde{\mathbf{R}}_2 \xi^2\right]^+ = 0, \left[\mathbf{\Phi}`_1^A, \widetilde{\mathbf{R}}_3 \xi^3\right]^+ = 0, \left[\mathbf{\Phi}`_1^A, \widetilde{\mathbf{R}}_4 \xi^4\right]^+ = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Преобразуем (14) с учетом (15):

$$\mathbf{\Phi}_4\mathbf{\Phi}_3\left(\mathbf{\Phi}_2^K-\mathbf{\Phi}_2^A\right)\left(\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}+_3\left(\mathbf{\Phi}_2^K-\mathbf{\Phi}_2^A\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathbf{\Phi}_2^K+\mathbf{\Phi}_2^A\right)+\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}_1\mathbf{J}+$$

$$+\mathbf{\Phi}_4\mathbf{\Phi}_3\left(\mathbf{\Phi}'^K_1-\mathbf{\Phi}'^A_1\right)\left(\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\left(\mathbf{\Phi}'^K_1-\mathbf{\Phi}'^A_1\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{\Phi}'^K_1+\mathbf{\Phi}'^A_1\right)+\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}'_2\mathbf{J}=0\cdot$$

Данное уравнение будет иметь решение в случае, если каждое слагаемое будет равно нулю.

$$\mathbf{\Phi}_4\mathbf{\Phi}_3\left(\mathbf{\Phi}_2^K-\mathbf{\Phi}_2^A\right)\left(\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}+_3\left(\mathbf{\Phi}_2^K-\mathbf{\Phi}_2^A\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathbf{\Phi}_2^K+\mathbf{\Phi}_2^A\right)+\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}_1\mathbf{J}=0 \quad (16.1)$$

$$\mathbf{\Phi}_4\mathbf{\Phi}_3\left(\mathbf{\Phi}'^K_1-\mathbf{\Phi}'^A_1\right)\left(\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\left(\mathbf{\Phi}'^K_1-\mathbf{\Phi}'^A_1\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{\Phi}'^K_1+\mathbf{\Phi}'^A_1\right)+\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}'_2\mathbf{J}=0. \quad (16.2)$$

В каждом из вышеприведенных уравнений выделим уравнения от переменных x_2 и x_1 соответственно:

$$\left(\mathbf{\Phi}_2^K-\mathbf{\Phi}_2^A\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathbf{\Phi}_2^K+\mathbf{\Phi}_2^A\right)=\mathbf{K}_2. \quad (17)$$

$$\left(\mathbf{\Phi}`^K_1-\mathbf{\Phi}`^A_1\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{\Phi}`^K_1+\mathbf{\Phi}`^A_1\right)=\mathbf{K}`_1. \quad (18)$$

Разложение матриц $\mathbf{\Phi}_2^K$ и $\mathbf{\Phi}_2^A$ по базисным матрицам с учетом требований (15):

$$\mathbf{\Phi}_2^K=h_0^2\cdot\mathbf{\Gamma}^0,\mathbf{\Phi}_2^A=h_{37}^2\cdot\mathbf{\Gamma}^{37}.$$

С учетом этого решение (17) можно записать:

$$h_{37}^2=\frac{1}{2}\left(g_2^2-g_1^2\right),\ h_0^2=\frac{1}{2}\left(g_2^2+g_1^2\right), \quad (19)$$

где

$$g_1^2=\frac{\sqrt{k_{y1}^2-k_{y2}^2}}{k_{y1}^2+k_{y2}^2}\left(C_{y1}\cos\sqrt{k_{y1}^2-k_{y2}^2}x_2-C_{y2}\sin\sqrt{k_{y1}^2-k_{y2}^2}x_2\right),$$

$$g_2^2=\left(C_{y2}\cos\sqrt{k_{y1}^2-k_{y2}^2}x_2+C_{y1}\sin\sqrt{k_{y1}^2-k_{y2}^2}x_2\right).$$

Аналогично на основании (15) для матриц $\mathbf{\Phi}`^K_1$ и $\mathbf{\Phi}`^A_1$ получим разложение:

$$\mathbf{\Phi}`^K_1=h`^1_0\cdot\mathbf{\Gamma}^0,\mathbf{\Phi}`^A_1=h`^1_{32}\cdot\mathbf{\Gamma}^{32}.$$

Решение уравнения (18) в этом случае будет иметь вид:

$$h`^1_{32}=\frac{1}{2}\left(g`^1_2+g`^1_1\right),\ h`^1_0=\frac{1}{2}\left(g`^1_1-g`^1_2\right), \quad (20)$$

где $g`_1 = \left(C_{x2}\cos\sqrt{k_{x1}^2 - k_{x2}^2}\,x_1 + C_{x1}\sin\sqrt{k_{x1}^2 - k_{x2}^2}\,x_1\right)$,

$$g`_2 = -\frac{\sqrt{k_{x1}^2 - k_{x2}^2}}{k_{x1}^2 + k_{x2}^2}\left(C_{x1}\cos\sqrt{k_{x1}^2 - k_{x2}^2}\,x_1 - C_{x2}\sin\sqrt{k_{x1}^2 - k_{x2}^2}\,x_1\right).$$

Матрицы K_2 и $K`_1$ соответственно имеют вид:

$$\mathbf{K}_2 = \widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2(k_{y2}\mathbf{\Gamma}^0 + k_{y1}\mathbf{\Gamma}^{37}),$$
$$\mathbf{K}`_1 = \widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1(k_{x2}\mathbf{\Gamma}^0 + k_{x1}\mathbf{\Gamma}^{32}). \tag{21}$$

Здесь $k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = k_x$, $k_{y1}^2 - k_{y2}^2 = k_y$ представляют собой поперечные волновые числа двух связанных волн.

Таким образом, из (16.1) получаем уравнение для переменной x_1:

$$\left(\widetilde{\mathbf{R}}_1\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}_1\mathbf{J} = 0. \tag{22}$$

Так как $\mathbf{\Phi}_1$ произвольная матрица, то произведение $\mathbf{\Phi}_1\mathbf{J}$ можно представить в виде вектора столбца:

$$\mathbf{\Phi}_1\mathbf{J} = [f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), f_3^1(x_1), f_4^1(x_1), f_5^1(x_1), f_6^1(x_1), f_7^1(x_1), f_8^1(x_1)]^T.$$

Аналогично для переменной x_2 получаем

$$\left(\widetilde{\mathbf{R}}_2\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{K}`_1 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4\right)\mathbf{\Phi}`_2\mathbf{J} = 0, \tag{23}$$

где $\mathbf{\Phi}`_2\mathbf{J} = [f_1^2(x_2), f_2^2(x_2), f_3^2(x_2), f_4^2(x_2), f_5^2(x_2), f_6^2(x_2), f_7^2(x_2), f_8^2(x_2)]^T$.

Уравнения (22)-(23) представляют собой две системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для решения этих систем использовалась система компьютерной алгебры Maple 8.

3.4. Граничные условия. В продольной структуре согласно [10] может существовать либо класс Е-волн, для которых граничное условие применяется к продольной составляющей электрического поля, а продольная составляющая магнитного поля равна нулю, либо класс Н-волн, для которого нулевой является продольная составляющая электрического поля. Построим решение для Е-волн. В качестве граничного условия мы будем использовать отсутствие продольной составляющей напряженности электрического поля

$$E_Z = -\varphi_4 = e^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3}\{$$
$$\left(C_{x1}\cos\sqrt{k_x}\,x_1 - C_{x2}\sin\sqrt{k_x}\,x_1\right)$$
$$(C_{y3}^*\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_x}\,x_2 + C_{y4}^*\cos\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_x}\,x_2) +$$

$$\left(C_{y1}\cos\sqrt{k_y}\,x_2 - C_{y2}\sin\sqrt{k_y}\,x_2\right)$$

$$(C^*_{x3}\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_y}\,x_1 + C^*_{x4}\cos\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_y}\,x_1)\}$$

на границе волновода.

Треугольное сечение волновода, условно разобьем на три границы (рис. 1) – нижнюю, боковую и наклонную. Таким образом, первых два граничных условия сводятся к равенству нулю четвертого элемента вектора столбца **Ф** при $x_1 = 0$, соответствующее нижней границе, и $x_2 = 0$ – боковой границе. Из них следует равенство нулю следующих коэффициентов: C_{y1}, C^*_{y4}, C_{x1}, C^*_{x4}.

$$E_Z = e^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3} (C_{x2}\sin\sqrt{k_x}\,x_1 C^*_{y3}\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_x}\,x_2 +$$

$$+ C_{y2}\sin\sqrt{k_y}\,x_2 C^*_{x3}\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_y}\,x_1)$$

Третье граничное условие принимает вид:

$$E_Z\Big|_{x_2 = a - x_1} = e^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3} (C_{x2}\sin\sqrt{k_x}\,x_1 C^*_{y3}\cdot\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_x}\,(a - x_1) +$$

$$+ C_{y2}\sin\sqrt{k_y}\,(a - x_1)\cdot C^*_{x3}\sin\sqrt{k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu - k_y}\,x_1) = 0$$

Данное тригонометрическое равенство будет верным и при выполнении следующих условий:

$$C_{x2}C^*_{y3} = C_{y2}C^*_{x3} = C,$$

$$k_3^2 - k_4^2\varepsilon\mu = \frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{a^2},\quad k_x = \frac{\pi^2 m^2}{a^2},\quad k_y = \frac{\pi^2 n^2}{a^2},$$

где m, n – целые числа, для которых справедливо условие $|m - n| = 2k, k \in \mathrm{Z}$.

Таким образом, E_Z принимает вид

$$E_Z = Ce^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3} (\sin\frac{\pi m}{a}x_1 \sin\frac{\pi n}{a}x_2 + \sin\frac{\pi n}{a}x_1 \sin\frac{\pi m}{a}x_2).$$

При этом остальные компоненты электромагнитного поля приобретают следующий вид:

$$E_X = \frac{Ce^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3}}{\dfrac{\pi(m^2 + n^2)}{a}} k_3\left(n\cos(\frac{\pi n}{a}x_1)\sin(\frac{\pi m}{a}x_2) + m\cos(\frac{\pi m}{a}x_1)\sin(\frac{\pi n}{a}x_2)\right),$$

$$E_Y = \frac{Ce^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3}}{\dfrac{\pi(m^2 + n^2)}{a}} k_3\left(m\sin(\frac{\pi n}{a}x_1)\cos(\frac{\pi m}{a}x_2) + n\sin(\frac{\pi m}{a}x_1)\cos(\frac{\pi n}{a}x_2)\right),$$

$$H_Y = -\frac{Ce^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3}}{\frac{\pi(m^2+n^2)}{a}} k_4 \varepsilon \left(n\cos(\frac{\pi n}{a}x_1)\sin(\frac{\pi m}{a}x_2) + m\cos(\frac{\pi m}{a}x_1)\sin(\frac{\pi n}{a}x_2) \right),$$

$$H_X = \frac{Ce^{k_4 x_4} e^{k_3 x_3}}{\frac{\pi(m^2+n^2)}{a}} k_4 \varepsilon \left(m\sin(\frac{\pi n}{a}x_1)\cos(\frac{\pi m}{a}x_2) + n\sin(\frac{\pi m}{a}x_1)\cos(\frac{\pi n}{a}x_2) \right).$$

4. Заключение

Предложенная в [2] матричная форма записи системы уравнений Максвелла является перспективным направлением для дальнейших исследований. На примере треугольного волновода было показано, что находясь только в рамках данного представления возможно построение аналитического решения. Использование данного подхода позволяет избежать математических трудностей, связанных с построением волновых уравнений.

Использование алгебраического метода разделения переменных требует разделения матричного оператора на операторы от соответствующих переменных. Однозначно выделить указанные операторы не возможно. Это создает многообразие путей разделения исходного уравнения. В каждом конкретном случае определяющим фактором выбора направления разделения переменных являются граничные условия.

На этапе разделения переменных x_1 и x_2 мы принимали решение в виде суммы произведений матриц от соответствующих переменных. В случае прямоугольного волновода для удовлетворения граничных условий достаточно только одного произведения. Таким образом, в случае сложной зависимости параметров среды от пространственных и временных координат требуется обобщение метода разделения переменных на матричные уравнения.

Решение задачи треугольного волновода в матричном представлении также позволяет взглянуть по-новому на идею связанных волн. Результаты вычислений полностью согласуются с результатами, полученными с использованием обобщенного метода Фурье [4], что говорит об эффективности разработанного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Андрушкевич, И.Е.*** О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский, Ю.В. Шиенок // Вестник Витебского государственного университета. – 2005. – № 1(35). – С. 112-118.
2. ***Андрушкевич, И.Е.*** Матричное представление системы уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич // “Ученые записки” УО “ВГУ им. П.М. Машерова”. – Том 5. – Витебск, 2006.
3. ***Андрушкевич, И.Е.*** Алгебраический метод разделения переменных в системе уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич // Международная алгебраическая конференция “Классы групп и алгебр”, посвященная 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, 2005. – С. 32-33.
4. ***Андрушкевич, И.Е.*** Применение обобщенного метода Фурье в задаче волновода треугольного сечения / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Витебского государственного университета. – 2002. – № 2(26). – С. 110-117.
5. ***Морс, Ф.М.*** Методы теоретической физики / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – Т. 1. – 930 с.

6. ***Морс, Ф.М.*** Методы теоретической физики / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – Т. 2. – 896 с.
7. ***Kalnius, E.G.*** Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables / E.G. Kalnius, W. Miller, G.C. Williams // J. Math. Phys. – 1986. – № 8. – p. 1893-1900.
8. ***Андрушкевич, И.Е.*** Об алгебраическом методе разделения переменных в уравнении Дирака / И.Е. Андрушкевич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 158-164.
9. ***Андрушкевич, И.Е.*** О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях / И.Е. Андрушкевич, Е.Г. Шишкин // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т. 70.
10. ***Никольский В.В.*** Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 11.06.2007.