УДК 517.984

О.В. ГУЛИНА

СВОЙСТВА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА САФАРА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье рассматриваются регулярные операторы (операторы типа Сафара), существенно регулярные операторы и порожденные ими соответствующие спектры: спектр Сафара и существенный спектр Сафара линейных ограниченных операторов, действующих на банаховом пространстве. Излагаются некоторые свойства указанных спектров. Исследуется местоположение существенного спектра Сафара относительно хорошо известных существенных спектров линейных ограниченных операторов. Приводятся примеры вычисления существенного спектра Сафара операторов сдвига, действующих на банаховом пространстве бесконечных числовых последовательностей, суммируемых с весом, и оператора Рэйли, действующего на банаховом пространстве бесконечных числовых последовательностей. Сформулированы теоремы об отображении для спектра Сафара и для существенного спектра Сафара.

Многие авторы рассматривали свойства устойчивости ограниченных линейных операторов с замкнутой областью значений, для которых по крайней мере одна из числовых характеристик оператора (размерность ядра или коядра) конечна. Также детально были изучены связанные с ними существенные спектры. Однако если обе числовые характеристики линейного ограниченного оператора с замкнутой областью значений бесконечны, то, согласно классической теореме М.А. Гольдмана [1], можно указать такой линейный компактный оператор бесконечного ранга, даже сколь угодно малый по норме, прибавление которого нарушает замкнутость области значений.

Пусть X – бесконечномерное банахово пространство над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. Обозначим через $\boldsymbol{B}(X)$ банахову алгебру линейных ограниченных операторов с областью определения X и областью значений $R(T)\subseteq X$. Рассмотрим оператор $T\in\boldsymbol{B}(X)$. Обозначим через $N(T)$ ядро оператора. Тогда $nul(T):=\dim N(T)$ и $def(T):=\operatorname{codim}(R(T))$ – нуль и дефект оператора T соответственно. Обобщенным ядром оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$ называется множество $N^\infty(T):=\bigcup\{N(T^k):k=1,2,3,\ldots\}$, обобщенная область значений оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$ есть множество $R^\infty(T):=\bigcap\{R(T^k):k=1,2,3,\ldots\}$.

I. Обобщенный обратный оператор и его свойства

В теории линейных ограниченных операторов существуют два взаимосвязанных класса обобщенных обратных операторов, играющих важную роль.

Определение 1.1. Пусть $T\in\boldsymbol{B}(X)$. Оператор $S\in\boldsymbol{B}(X)$ называется g_1-обратным для оператора T, если выполняется равенство $TST=T$. В этом случае говорят, что оператор T g_1-обратим. Если оператор $S\in\boldsymbol{B}(X)$ удовлетворяет двум равенствам $TST=T$ и $STS=S$, то оператор S называется g_2-обратным для оператора T. В этом случае говорят, что оператор T g_2-обратим.

Между классами g_1-обратимых и g_2-обратимых операторов существует взаимосвязь, которая устанавливается непосредственной проверкой, а именно: если оператор S является g_1-обратным для оператора T, то оператор STS является

g_2-обратным для оператора T. В силу этого будем говорить, что оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный, или является g-обратимым, если существует оператор $S \in \boldsymbol{B}(X)$ такой, что выполняется равенство $TST = T$, или существует оператор $S \in \boldsymbol{B}(X)$, такой, что выполняется пара равенств $TST = T$ и $STS = S$. Иными словами, оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный, или является g-обратимым, если для него выполняется хотя бы одно из свойств обобщенной обратимости.

Класс g-обратимых операторов, действующих на X без дополнительных ограничений на пространство, включает в себя много хорошо известных типов операторов, например, все фредгольмовы операторы являются g-обратимыми, все операторы, имеющие левый обратный или правый обратный, являются g-обратимыми.

Если X – гильбертово пространство, то класс g-обратимых операторов из $\boldsymbol{B}(X)$ совпадает с классом операторов, имеющих замкнутую область значений. Этот факт является следствием того, что в гильбертовом пространстве каждое замкнутое подпространство является дополняемым.

Если X – конечномерное пространство, то все операторы из $\boldsymbol{B}(X)$ являются g-обратимыми.

Замечание 1.1. Если оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ является g-обратимым, тогда сопряженный оператор $T^* \in \boldsymbol{B}(X^*)$ является g-обратимым. Обратное утверждение, т.е. если оператор $T^* \in \boldsymbol{B}(X^*)$ g-обратимый, то оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ является также g-обратимым, выполняется, если пространство X является рефлексивным. В общем случае, без дополнительных ограничений на X, из g-обратимости сопряженного оператора не следует g-обратимость исходного [2, с. 14].

Подробная информация об обобщенных обратных и их свойствах содержится в книге [2]. Для полноты изложения материала сформулируем некоторые из них.

Лемма 1.1. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и $S \in \boldsymbol{B}(X,Z)$. Если оператор ST является фредгольмовым, т.е. область его значений замкнута и обе характеристики $nul(T)$ и $def(T)$ конечны, тогда оператор S имеет обобщенный обратный и оператор T имеет обобщенный обратный.

Следствие 1.1. Если $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и оператор T^n – фредгольмов, то оператор T также является фредгольмовым.

Поскольку для линейных ограниченных операторов, действующих на банаховом пространстве, “классическими” типами возмущений являются малые по норме возмущения или возмущения компактными или конечномерными операторами, то целесообразно отметить следующие свойства g-обратимых операторов.

Лемма 1.2. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный и оператор $F \in \boldsymbol{B}(X)$ конечномерный. Тогда оператор $T + F$ имеет обобщенный обратный.

Замечание 1.2. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный и обе его характеристики $nul(T)$ и $def(T)$ являются бесконечными. Тогда существует компактный оператор $B \in \boldsymbol{B}(X)$ такой, что область значений оператора $T + \lambda B$ незамкнута для любого $\lambda \neq 0$. Соответствующий пример построен в [2, с. 142].

В общем случае, если оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный, то для того, чтобы оператор $T + B$, где $B \in \boldsymbol{B}(X)$, также имел обобщенный обратный, необходимо наложить дополнительные условия на оператор $B \in \boldsymbol{B}(X)$.

Теорема 1.1. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – g-обратимый оператор для которого оператор S является g_1-обратным. Предположим, что $U \in \boldsymbol{B}(X)$ и что оператор $I - US$ является фредгольмовым, для которого оператор V является g_1-обратным. Предположим, что оператор $(I-TS)VU(I-ST)$ – g-обратимый. Тогда оператор $T-U$ является g-обратимым.

Доказательство теоремы изложено в [2, с. 144-145].

Замечание 1.3. Предположение теоремы “оператор $I-US$ является фредгольмовым” может быть заменено на предположение “оператор $I-SU$ является фредгольмовым” [2, с. 145]. Условие “оператор $I-US$ является фредгольмовым” подразумевает “классическое” условие теории устойчивости операторов при различных возмущениях: если оператор $U \in \boldsymbol{B}(X)$ малый по норме, в частности, если $\|U\| < \|S\|^{-1}$, то оператор $I-US$ является обратимым; если оператор $U \in \boldsymbol{B}(X)$ компактный, то оператор US также компактный и, следовательно, оператор $I-US$ является фредгольмовым.

Следствие 1.2. Если $\|U\| < \|S\|^{-1}$ и выполняется условие $N(U) \supseteq N(T)$ или $R(U) \subseteq R(T)$, то для оператора $T-U$ существует обобщенный обратный.

Следствие 1.3. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ имеет обобщенный обратный. Предположим, что $R(T) \supseteq N(T)$. Пусть M – замкнутое подпространство, удовлетворяющее условию $R(T) \supseteq M \supseteq N(T)$ и $TM = M$. Тогда, если $UM \subseteq M$ и $\|U\| < \|S\|^{-1}$, то для оператора $T-U$ существует обобщенный обратный и операторы $(I-SU)^{-1}S$, $S(I-US)^{-1}$ действуют одинаково и задают g_1-обратный оператор для $T-U$.

Замечание 1.4. Если $R(T^n) \supseteq N(T)$ для любого n и $R(T^n)$ замкнута для каждого n, то в качестве M можно рассматривать множество, заданное формулой $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(T^n)$. Этот случай был детально исследован П. Сафаром.

II. Регулярные и существенно регулярные операторы

Определение 2.1. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется регулярным оператором, если для него существует обобщенный обратный и выполняется включение $N(T) \subset R^{\infty}(T)$.

Регулярный оператор, следуя [3], назовем оператором типа Сафара. Множество всех линейных ограниченных операторов типа Сафара, действующих на банаховом пространстве X, обозначим через $\boldsymbol{S}(X)$.

Условие, $N(T) \subset R^{\infty}(T)$ в определении оператора типа Сафара можно сформулировать в терминах обобщенного ядра и области значений или обобщенной области значений.

Теорема 2.1. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – оператор с замкнутой областью значений. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$N(T) \subset R^{\infty}(T), N^{\infty}(T) \subset R(T), N^{\infty}(T) \subset R^{\infty}(T).$$

Доказательство этого факта содержится, например, в [4].

Теорема 2.2. Пусть $T \in \boldsymbol{S}(X)$ и оператор S является g_2-обратным для оператора T. Пусть $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(T^n)$ и выполняются условия $UM \subseteq M$, $\|U\| < \|S\|^{-1}$. Тогда оператор $T-U$ является оператором типа Сафара, для которого выполняются включения $N(T-U)\subseteq M\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T-U)^n$ и оператор $S(I-US)^{-1}=(I-SU)^{-1}S$ является g_2-обратным для оператора $T-U$.

Замечание 2.1. Условие $UM\subseteq M$ удовлетворяется любым оператором, коммутирующим с оператором T: если $TU=UT$, то $TUM=UTM=UM$ и, следовательно, $T^nUM=UM$ и $UM\subseteq R(T^n)$ для любого n, т.е. $UM\subseteq M$.

Несмотря на то, что операторы типа Сафара кажутся достаточно специфическими, они обладают важным свойством: если $V\subset \boldsymbol{C}$ – открытое множество и $F:V\to\boldsymbol{B}(X)$ – голоморфное отображение такое, что выполняется равенство $(\lambda I-T)F(\lambda)(\lambda I-T)=\lambda I-T$ для $\forall\lambda\in V$, то оператор $\lambda I-T$ является оператором типа Сафара.

В работе [5] сформулирован и доказан следующий результат.

Теорема 2.3. Оператор $T\in\boldsymbol{S}(X)$ тогда и только тогда, когда существует окрестность $U\subset\boldsymbol{C}$ точки 0 и голоморфная функция $F:U\to\boldsymbol{B}(X)$ такая, что выполняется равенство $(\lambda I-T)F(\lambda)(\lambda I-T)=\lambda I-T$ для всех $\lambda\in\boldsymbol{C}$.

Для оператора типа Сафара имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $T\in\boldsymbol{S}(X)$. Тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что для каждого оператора $U\in\boldsymbol{B}(X)$, удовлетворяющего условиям $TU=UT$ и $\|U\|<\varepsilon$, оператор $T-U$ имеет обобщенный обратный.

Доказательство теоремы содержится в статье [4].

Определение 2.2. Оператор $T\in\boldsymbol{B}(X)$ называется существенно регулярным, если для него существует обобщенный обратный и выполняется включение $N(T)\overset{e}{\subset}R^{\infty}(T)$, то есть размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений $R^{\infty}(T)$ конечна.

Множество всех существенно регулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{S}_e(X)$.

Условие, $N(T)\overset{e}{\subset}R^{\infty}(T)$ в определении существенно регулярного оператора можно также сформулировать в терминах обобщенного ядра и области значений или обобщенной области значений.

Теорема 2.5. Пусть $T\in\boldsymbol{B}(X)$ – оператор с замкнутой областью значений. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$N(T)\overset{e}{\subset}R^{\infty}(T),\ N^{\infty}(T)\overset{e}{\subset}R(T),\ N^{\infty}(T)\overset{e}{\subset}R^{\infty}(T).$$

Доказательство этого факта приводится, например, в [4].

В работе М.А. Гольдмана и С.Н. Крачковского [6] доказаны результаты, позволяющие сделать выводы об устойчивости существенно регулярных операторов относительно малых по норме возмущений. Если $T\in\boldsymbol{S}_e(X)$, то для того, чтобы оператор $T+A$, где $A\in\boldsymbol{B}(X)$ – малый по норме, также принадлежал классу $\boldsymbol{S}_e(X)$, оператор $A\in\boldsymbol{B}(X)$ должен коммутировать с оператором T.

Теорема 2.6. Пусть $T\in\boldsymbol{S}_e(X)$ и $A\in\boldsymbol{B}(X)$ – малый по норме оператор, удовлетворяющий условию $TA=AT$, тогда оператор $T+A\in\boldsymbol{S}_e(X)$. Кроме того, для операторов $T\in\boldsymbol{S}_e(X)$ и $A\in\boldsymbol{B}(X)$ справедливы следующие результаты:

1) $N^{\infty}(T+A)\cap R^{\infty}(T+A)=N^{\infty}(T)\cap R^{\infty}(T)$;

2) $nul(T+A) \le nul(T)$, $def(T+A) \le def(T)$;

3) Если $N(T) = R^{\infty}(T)$, то $R^{\infty}(T+A) = R^{\infty}(T)$, $nul(T+A) = nul(T)$, $def(T+A) = def(T)$.

Замечание 2.2. Неравенства 2-го пункта $nul(T+A) \le nul(T)$, $def(T+A) \le def(T)$ выполняются и без условия перестановочности операторов T и A.

Очевидным является включение $\boldsymbol{S}(X) \subset \boldsymbol{S}_e(X)$, отражающее взаимосвязь между классом операторов типа Сафара и классом существенно регулярных операторов.

III. Спектр Сафара и существенный спектр Сафара

Регулярные операторы, или операторы типа Сафара, и существенно регулярные операторы порождают соответствующие спектры, которые называются спектром Сафара и существенным спектром Сафара.

Определение 3.1. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Тогда подмножество элементов комплексной плоскости $\sigma_S(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : T - \lambda I \notin \boldsymbol{S}(X)\}$ называется спектром Сафара оператора T.

Определение 3.2. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Тогда подмножество элементов комплексной плоскости $\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : T - \lambda I \notin \boldsymbol{S}_e(X)\}$ называется существенным спектром Сафара оператора T.

Поскольку $\boldsymbol{S}(X) \subset \boldsymbol{S}_e(X)$, то для соответствующих спектров $\sigma_s(T)$ и $\sigma_{es}(T)$ оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ справедливы включения $\sigma_{es}(T) \subset \sigma_s(T) \subset \sigma(T)$, где $\sigma(T)$ – спектр оператора T.

Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости: $\rho_S(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : T - \lambda I \in \boldsymbol{S}(X)\}$ и $\rho_\gamma(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : R(T-\lambda I) = \overline{R(T-\lambda I)}$ и $N(T-\lambda I) \subseteq R^{\infty}(T-\lambda I)\}$. Тогда выполняются включения $\rho(T) \subseteq \rho_s(T) \subseteq \rho_\gamma(T)$, где $\rho(T)$ – резольвентное множество оператора T. Из теоремы 2.3. следует, что множество ρ_S является открытым. Поскольку спектр Сафара $\sigma_s(T)$ оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ можно определить по формуле $\sigma_S(T) := \boldsymbol{C} \setminus \rho_S(T)$, то множество $\sigma_s(T)$ – замкнуто. Для границы спектра $\partial\sigma(T)$ оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$, справедливо включение $\partial\sigma(T) \subseteq (\boldsymbol{C} \setminus \rho_\gamma(T))$. Поскольку $\partial\sigma(T) \subseteq (\boldsymbol{C} \setminus \rho_\gamma(T)) \subseteq \sigma_s(T)$, то $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T)$. Таким образом, из приведенных выше рассуждений следует теорема.

Теорема 3.1. Спектр Сафара $\sigma_s(T)$ линейного ограниченного оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ есть непустое замкнутое подмножество спектра $\sigma(T)$ оператора T, содержащее границу $\partial\sigma(T)$ спектра, т.е. $\sigma_s(T) \ne \varnothing$, $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T) \subseteq \sigma(T)$.

Обозначим через X^* сопряженное пространство к бесконечномерному банаховому пространству X, а через T^* – сопряженный оператор для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Возникает вопрос о соотношении спектров Сафара оператора T и его сопряженного T^*. Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $\sigma_S(T^*) \ne \sigma_S(T)$.

Пример. Пусть ℓ^{∞} – банахово пространство комплексных ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой $\|x\| = \sup_{n=1}^{\infty}|x_n|$. Замкнутое подпространство ℓ^{∞}, состоящее из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, обозначим через c_0. Положим $X = c_0 \times \ell^{\infty}$. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to X$, определяемый формулой $T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) =$

$=((0,0,0,\ldots),(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots))$. Для оператора T выполняются следующие свойства: $N(T)=\{0\}$, $T(X)$ не является дополняемым, а для сопряженного оператора T^* справедлива замкнутость области значений и выполняется включение $N(T^*)\subset R^\infty(T^*)$ [2, с. 15]. Таким образом, $0\in\sigma_s(T)$ и $0\notin\sigma_s(T^*)$, т.е. $\sigma_s(T^*)\neq\sigma_s(T)$.

Пусть $T\in \boldsymbol{B}(X)$. Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости:

$$\Delta_1(T):=\{\lambda\in C:\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)\},\ \Phi^+(T):=\{\lambda\in\Delta_1(T):nul(T-\lambda I)<\infty\},$$

$$\Phi^-(T):=\{\lambda\in\Delta_1(T):def(T-\lambda I)<\infty\},\ \Delta_3(T):=\Phi^+(T)\cap\Phi^-(T)=\Phi(T).$$

Подмножество комплексной плоскости $\Delta_1(T)$ называется областью нормальной разрешимости оператора T, подмножество $\Delta_3(T)$ – областью фредгольмовости оператора T. Тогда подмножества комплексной плоскости $\sigma_{eg}(T):=\boldsymbol{C}\setminus\Delta_1(T)$ и $\sigma_{ef}(T):=\boldsymbol{C}\setminus\Delta_3(T)$ определяют существенный спектр Голдберга и существенный спектр Фредгольма оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$ соответственно.

Теорема 3.2. Пусть $T\in\boldsymbol{B}(X)$. Тогда существенный спектр Сафара оператора T есть непустое подмножество комплексной плоскости, для которого справедливы включения $\sigma_{eg}(T)\subseteq\sigma_{es}(T)\subseteq\sigma_{ef}(T)\subseteq\sigma(T)$.

Доказательство теоремы следует непосредственно из определения соответствующих существенных спектров оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$.

Таким образом, существенный спектр Сафара занимает промежуточное положение между хорошо известными существенными спектрами Голдберга и Фредгольма. Как будет показано ниже, перечисленные существенные спектры обладают различными свойствами, что обуславливает необходимость их изучения.

Замечание 3.1. Множество элементов комплексной плоскости задаваемое формулой $\sigma_{e\gamma}(T):=\boldsymbol{C}\setminus\rho_{e\gamma}(T)$, где $\rho_{e\gamma}(T):=\left\{\lambda\in\boldsymbol{C}:R(T-\lambda I)=\overline{R(T-\lambda I)}\right.$ и $\left.N(T-\lambda I)\overset{e}{\subseteq}R^\infty(T-\lambda I)\right\}$, определяет существенный спектр Апостола оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$ [7]. Таким образом, теорема 3.2. может быть переформулирована в следующем виде.

Теорема 3.3. Пусть $T\in\boldsymbol{B}(X)$. Тогда существенный спектр Сафара оператора T есть непустое подмножество комплексной плоскости, для которого справедливы включения $\sigma_{eg}(T)\subseteq\sigma_{e\gamma}\subseteq\sigma_{es}(T)\subseteq\sigma_{ef}(T)\subseteq\sigma(T)$.

IV. Примеры вычисления существенного спектра Сафара линейных ограниченных операторов

Рассмотрим примеры линейных ограниченных операторов, действующих на бесконечномерном банаховом пространстве, и определим для них существенный спектр Сафара. Пусть $\ell^p(a)$, $a>0$, $1<p<\infty$, – банахово пространство бесконечных числовых последовательностей $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$, суммируемых с весом a^n, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n|x_n|^p<\infty$, для которых норма задается следующим образом $\|x\|:=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Для вычисления существенных спектров Голдберга и

Фредгольма линейных ограниченных операторов левого сдвига $A : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$ и правого сдвига $S : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$, задаваемых формулами $Ax := (x(2), x(3), x(4), \ldots)$ и $Sx := (0, x(1), x(2), x(3), \ldots)$ соответственно, где $x \in \ell^p(a)$, были получены следующие формулы:

$$\sigma_{eg}(A) = \sigma_{ef}(A) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{-1/p}\right\} \subset \sigma(A) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \le a^{-1/p}\right\},$$

$$\sigma_{eg}(S) = \sigma_{ef}(S) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{1/p}\right\} \subset \sigma(A) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \le a^{1/p}\right\},$$

доказательства которых подробно изложены в статье [8]. Опираясь на приведенные результаты и теорему 3.2., заключаем, что для линейных ограниченных операторов левого сдвига $A : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$ и правого сдвига $S : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Существенные спектры Сафара операторов $A : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$ и $S : \ell^p(a) \to \ell^p(a)$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{es}(A) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{-1/p}\right\}, \quad \sigma_{es}(S) = \left\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{1/p}\right\}.$$

Обозначим через ℓ^p, $1 < p < \infty$, банахово пространство бесконечных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых норма задается следующим образом $\|x\| := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Пусть $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ – числовая последовательность, для которой выполняются условия $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n = L \ne 0$. Рассмотрим оператор Рэйли $R_a : \ell^p \to \ell^p$, задаваемый нижней треугольной матрицей, элементы которой удовлетворяют условиям $a_{nk} = a_{nn}$, если $k \le n$, и $a_{nk} = 0$ в противном случае. Для существенных спектров Голдберга и Фредгольма оператора Рэйли справедливы результаты $\sigma_{eg}(R_a) = \sigma_{ef}(R_a) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda - Lq/2| = Lq/2\}$, где $q = p/(p-1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n = L \ne 0$ [9]. Тогда для существенного спектра Сафара оператора Рэйли, действующего на банаховом пространстве $\ell^p, 1 < p < \infty$, имеет место теорема.

Теорема 4.2. Существенный спектр Сафара оператора Рэйли $R_a : \ell^p \to \ell^p$ вычисляется по формуле $\sigma_{es}(R_a) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda - Lq/2| = Lq/2\}$, где $q = p/(p-1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n = L \ne 0$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 3.3. и результатов для существенных спектров Голдберга и Фредгольма оператора Рэйли.

V. Теорема об отображении для спектра Сафара и для существенного спектра Сафара линейного ограниченного оператора

Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Рассмотрим аналитическую в окрестности спектра оператора $\sigma(T)$ функцию f. Тогда для спектра Сафара оператора T выполняется теорема об отображении спектра.

Теорема 5.1. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и f – комплекснозначная аналитическая в окрестности $\sigma(T)$ функция. Тогда для спектра Сафара оператора f выполняется равенство $\sigma_s(f(T)) = f(\sigma_s(T))$.

Доказательство теоремы приведено в работах [4], [10].

Используя результат теоремы 5.1., можно сформулировать критерий для того, чтобы функция от оператора определяла оператор типа Сафара, т.е. чтобы $f(T) \in \boldsymbol{S}(X)$, где $T \in \boldsymbol{B}(X)$.

Теорема 5.2. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$, f – комплекснозначная аналитическая в окрестности $\sigma(T)$ функция и $Z(f)$ – множество нулей функции в $\sigma(T)$. Тогда $f(T)$ – оператор типа Сафара тогда и только тогда, когда $Z(f) \subseteq \rho_s(T)$. В этом случае множество $Z(f)$ конечное или пустое.

Замечание 5.1. Если оператор $f(T) \in \boldsymbol{S}(X)$, то для оператора $f(T)$ существует обобщенный обратный. В работе [3] приводится формула для вычисления обобщенного обратного для оператора $f(T) \in \boldsymbol{S}(X)$, где f – комплекснозначная аналитическая в окрестности $\sigma(T)$ функция и $T \in \boldsymbol{B}(X)$.

Для существенного спектра Сафара линейного ограниченного оператора также выполняется теорема об отображении.

Теорема 5.3. Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и f – аналитическая в окрестности $\sigma(T)$ функция. Тогда для существенного спектра Сафара оператора T выполняется равенство $\sigma_{es}(f(T)) = f(\sigma_{es}(T))$.

Одним из вариантов доказательства теоремы об отображении для существенного спектра Сафара является способ, основанный на понятии регулярности и свойствах регулярностей [4].

Замечание 5.2. Поскольку для существенного спектра Сафара оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ справедливы включения $\sigma_{eg}(T) \subseteq \sigma_{es}(T) \subseteq \sigma_{ef}(T)$, где $\sigma_{eg}(T)$ и $\sigma_{ef}(T)$ – существенные спектры Голдберга и Фредгольма оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ соответственно, то целесообразно отметить, что для существенного спектра Фредгольма оператора T выполняется теорема об отображении существенного спектра, а для существенного спектра Гольдберга в общем случае теорема об отображении неверна.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гольдман, М.А.*** Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных операторов / М.А. Гольдман // Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 100. – № 2. – С. 201-204.
2. ***Caradus, S.R.*** Generalized inverses and operator theory / S.R. Caradus. – Kingston, Ontario: Queen's University, 1978. – 209 p.
3. ***Schmoeger, Ch.*** On operators of Saphar type / Ch. Schmoeger // Port. Math. – 1994. – V. 51. – № 4. – P. 617-628.
4. ***Kordula, V.*** On the axiomatic theory of spectrum / V. Kordula, V. Muller // Stud. Math. – V. 119. – № 2. – 1996. – P. 109-128.
5. ***Schmoeger, Ch.*** The punctured neighborhood theorem in Banach algebras / Ch. Schmoeger // Proc. R. Ir.Acad. – 1991. – V. 91(A). – P. 205-218.
6. ***Гольдман, М.А.*** Операторы, нули которых образуют конечномерный выступ на риссовском ядре / М.А. Гольдман, С.Н. Крачковский // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 215. – № 6. – С. 1281-1284.
7. ***Еровенко, В.А.*** Свойства существенно полурегулярных операторов и существенного спектра Апостола / В.А. Еровенко, М.В. Мартон // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – № 6. – С. 16-20.
8. ***Михаськова (Гулина), О.В.*** Существенные спектры операторов сдвига в банаховых пространствах $\ell^p(a)$ / О.В. Михаськова (Гулина) // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 1. – С. 134-141.
9. ***Гулина, О.В.*** Существенные спектры оператора Рэйли в банаховом пространстве ℓ^p / О.В. Гулина // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2006. – № 2. – С. 79-83.
10. ***Schmoeger, Ch.*** Relatively regular operators and a spectral mapping theorem / Ch. Schmoeger // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – V. 175. – № 1. – P. 315-320.

Поступила в редакцию 11.04.2007 г.