МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.572

В.И. ГОЙКО, С.П. НОВИКОВ

ПОДАЛГЕБРЫ СО СВОЙСТВОМ ПОКРЫТИЯ-ИЗОЛИРОВАНИЯ ГЛАВНЫХ ФАКТОРОВ МУЛЬТИКОЛЬЦА

Гашюц построил профраттиниевы подгруппы в конечных разрешимых группах. Такие подгруппы имеют важное свойство покрывать или изолировать любой главный фактор группы. В дальнейшем Хоукс построил обобщение профраттиниевых подгрупп в конечных разрешимых группах. Затем С.П. Новиков обобщил покрывающие-изолирующие подгруппы для мультиколец.

В данной работе продолжены исследования свойств покрывающих-изолирующих подалгебр мультикольца, их связь с корадикалом и гиперцентром мультикольца, взамно-однозначное соответствие факторов композиционных рядов двух покрывающих-изолирующих подалгебр, вычисление порядков подалгебр, инвариантность при гомоморфизмах, а также свойство изоордности таких подалгебр.

В теории групп важное место занимают подгруппы, обладающие свойством покрывать или изолировать любой главный фактор группы. В связи с этим отметим работу Гашюца [1], в которой построена одна из таких подгрупп – профраттиниева подгруппа в конечных разрешимых группах. В дальнейшем Хоукс построил интересное обобщение профраттиниевых подгрупп (см. [2]). В последующем (см. [3], [4]) изучались дальнейшие важные свойства таких подгрупп в конечных разрешимых группах, а также появились их многочисленные аналоги и обобщения [5-10]. Затем в работе [11] покрывающие-изолирующие подгруппы были обобщены для мультиколец и исследованы в работах [12-15]. В данной работе продолжаются исследования свойств покрывающих-изолирующих подалгебр мультикольца: связь с корадикалом, гиперцентром, соответствие факторов композиционных рядов двух подалгебр, вычисление порядков подалгебр, инвариантность при гомоморфизмах.

1. Приведем некоторые определения и обозначения, используемые нами в данной работе.

Мультикольцо – алгебра A сигнатуры $\{+,-,0\}\bigcup\Omega$ такая, что алгебра $\{A,+,-,0\}$ – группа, все операции из Ω имеют ненулевые арности и для всякой n-арной операции $f\in\Omega$, любого $i\in\{1,\dots,n\}$, любых $a_1,\dots,a_{i-1},a_i'$, $a_i'',a_{i+1},\dots,a_n$ из A имеет место равенство:

$$f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i'+a_i'',a_{i+1},\dots,a_n)=f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i',a_{i+1},\dots,a_n)+$$
$$+f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i'',a_{i+1},\dots,a_n).$$

Через $\mathfrak{F}$ обозначаем класс мультиколец, Σ – некоторое множество главных факторов мультикольца.

Полуформация мультиколец – такой класс мультиколец $\mathfrak{F}$, что каждый гомоморфный образ любого мультикольца из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Формация мультиколец – такая полуформация $\mathfrak{F}$, что всякое конечное поддекартово произведение мультиколец из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Нормальный фактор H/K мультикольца A называется главным, если $K\neq H$ и из условия $K\subseteq T\subset H$, где T – идеал в A, всегда следует равенство: $K=T$.

Говорят, что H / K – *A-главный фактор из D*, если H / K – главный фактор мультикольца A и $H \subseteq D$.

Нормальные факторы H / K и D / R мультикольца A называют:

1) *перспективными*, если либо $H = K+D$ и $R = K \bigcap D$, либо $D = R + H$ и $K = R \bigcap H$;

2) *проективными*, если в A найдутся такие нормальные факторы $H / K = A_1 / B_1, \ldots, A_n / B_n = D / R$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\text{-}1\}$ факторы A_i / B_i и A_{i+1} / B_{i+1} перспективны.

Идеал N мультикольца A называется разрешимым в A, если в A найдутся такие идеалы $\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t \subseteq N$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо включение: $N_i \subseteq C_A(N_i / N_{i-1})$.

Говорят, что *мультикольцо A разрешимо*, если разрешимо в мультикольце A само A.

Нормальный фактор H / K мультикольца A называется *абелевым*, если $H \subseteq C_A(H / K)$.

Идеал N мультикольца A называют *A-абелевым*, если A-абелев фактор $N / \{0\}$.

Мультикольцо A называется φ-*разрешимым*, если оно обладает главным рядом и каждый его фраттиниев главный фактор A-абелев.

Пусть H / K – нормальный фактор мультикольца A, M – некоторая его подалгебра. Говорят, что *M покрывает (изолирует) фактор* H / K, если $H \subseteq K + M$ (соответственно $M \cap H \subseteq K$). Если при этом $K = \{0\}$, то говорят, что M покрывает (изолирует) идеал H.

Нормальный фактор H / K мультикольца H называется *$\mathfrak{F}$-центральным* (*$\mathfrak{F}$-эксцентральным*), если $H / K \leftthreetimes A/C_A(H/K) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $H / K \leftthreetimes A/C_A(H/K) \notin \mathfrak{F}$).

Говорят, что *подалгебра B дополняет* нормальный *фактор* H / K мультикольца A в мультикольце A, если $B + H = A$ и $B \bigcap H = K$.

Обозначения и определения, которые здесь используются, но не приведены, можно найти в книгах [16, 17].

2. Пусть Σ – множество главных факторов мультикольца A, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные. Подалгебра B из A называется САРΣ-*подалгеброй* в A [14], если она изолирует все факторы из Σ и покрывает остальные A-главные факторы.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс мультиколец, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов мультикольца A, обладающего главным рядом. Тогда каждая САРΣ-подалгебра H из A содержит $\mathfrak{F}$-гиперцентр $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$.

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_t = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$$

участок A-главного ряда, содержащийся в $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$. Тогда следующие факторы $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A) / A_{t-1}$, $A_{t-1} / A_{t-2}, \ldots, A_2 / A_1$ будут $\mathfrak{F}$-центральными. Следовательно, в силу вышеприведенного определения, подалгебра H их покрывает, т.е. справедливы следующие включения:

$$Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq H + A_{t-1} \subseteq H + A_{t-2} \subseteq \ldots \subseteq H + \{0\} \subseteq H.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс φ-разрешимых мультиколец, $\mathfrak{F}$ – формация с внутренним $\mathfrak{X}$-экраном, $A \in \mathfrak{X}$, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных A-главных факторов, T – САРΣ-подалгебра в A. Тогда справедливо равенство: $T + A^{\mathfrak{F}} = A$.

Доказательство. Если допустить, что $A^{\mathfrak{F}} = A$, то утверждение теоремы очевидно. Полагаем теперь, что $A^{\mathfrak{F}} \neq A$. Рассмотрим участок A-главного ряда

$$A^{\mathfrak{F}} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{t-1} \subset H_t = A.$$

Пусть f – экран формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что все факторы H_i / H_{i-1} $(i = 1,2,\ldots,t)$ будут f-центральными. Покажем, что они являются $\mathfrak{F}$-центральными. Пусть $i \in \{1,2,\ldots,t\}$. Обозначим: $C = C_A(H_i / H_{i-1})$, $D = H_i / H_{i-1} \leftthreetimes A / C$. Если фактор H_i / H_{i-1} будет A-абелевым, то идеал H_i / H_{i-1} будет f-центральным в D. Но $D /$ $(H_i / H_{i-1}) \cong A / C \in f(H_i / H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $D \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь фактор H_i / H_{i-1} не является A-абелевым. Тогда ввиду условия этот фактор нефраттиниев. Пусть M – максимальная в A подалгебра, не покрывающая фактор H_i / H_{i-1}. Ясно, что $M_A \subseteq C$. Если $C = M_A$, то ввиду включения $A / C \in f(H_i / H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$, получим, что $A / M_A \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что факторы H_i / H_{i-1} и $H_i + M_A / M_A$ перспективны. Значит, $C = C_A(H_i + M_A / M_A)$. Применяя лемму 3.22 из [16], получим, что $(H_i + M_A / M_A) \leftthreetimes A / C \in formA$. Поэтому $(H_i + M_A / M_A) \leftthreetimes A / C \in \mathfrak{F}$ и так как $H_i / H_{i-1} \leftthreetimes A / C \cong (H_i + M_A / M_A) \leftthreetimes A / C$, то фактор H_i / H_{i-1} будет $\mathfrak{F}$-центральным в A. Пусть теперь $M_A \subset C$. Тогда легко видеть, что C / M_A будет минимальным идеалом в A / M_A, отличным от $H_i + M_A / M_A$. Нетрудно установить, что подалгебра M / M_A дополняет в A / M_A оба идеала $H_i + M_A / M_A$ и C / M_A. Из этого следует, что $M / M_A \in \mathfrak{F}$ и A / M_A – поддекартово произведение мультиколец $(A / M_A)/(H_i + M_A / M_A)$ и $(A / M_A)/(C / M_A)$, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Значит, $A / M_A \in \mathfrak{F}$ и поэтому фактор H_i / H_{i-1} будет $\mathfrak{F}$-центральным в A. Из условия следует, что T покрывает факторы H_i / H_{i-1}: $H_i \subseteq T + H_{i-1}$, $i \in \{1,2,\ldots,t\}$. Последнее означает, что имеют место включения:

$$A = H_t \subseteq T + H_{t-1} \subseteq \ldots \subseteq T + H_1 \subseteq T + H_0 = T + A^{\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что $T + A^{\mathfrak{F}} = A$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс мультиколец, $\mathfrak{F}$ – формация с внутренним $\mathfrak{X}$-экраном, A – некоторое мультикольцо из $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, обладающее главным рядом, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных A-главных факторов, T есть САР Σ-подалгебра в A. Тогда $T + A^{\mathfrak{F}} = A$.

Доказательство. Если $A^{\mathfrak{F}} = A$, то утверждение очевидно. Пусть $A^{\mathfrak{F}} \neq A$. Рассмотрим участок A-главного ряда

$$A^{\mathfrak{F}} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{t-1} \subset H_t = A.$$

Пусть f – экран формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что все факторы H_i / H_{i-1} $(i = 1,2,\ldots,t)$ являются f-центральными. Покажем, что они являются $\mathfrak{F}$-центральными. Пусть $i \in \{1,2,\ldots,t\}$. Введем обозначения: $C = C_A(H_i / H_{i-1})$, $D = H_i / H_{i-1} \leftthreetimes$ $\leftthreetimes A / C$. Теперь в силу следующих соотношений $H_i / A^{\mathfrak{F}} \subseteq C_{A/A^{\mathfrak{F}}}\left(H_i / A^{\mathfrak{F}} / H_{i-1} /\right.$ $\left./ A^{\mathfrak{F}}\right) = C_A(H_i / H_{i-1}) / A^{\mathfrak{F}}$ получаем, что фактор H_i / H_{i-1} будет A-абелевым. Поэтому идеал H_i / H_{i-1} будет f-центральным в D. Но $D/(H_i / H_{i-1}) \cong A / C \in$ $\in f(H_i / H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $D \in \mathfrak{F}$. Из условия следует, что T покрывает факторы H_i / H_{i-1} $(i = 1,2,\ldots,t)$, т.е. $H_i \subseteq T + H_{i-1}$. Из последнего утверждения теперь получим следующие соотношения:

$$A = H_t \subseteq T + H_{t-1} \subseteq \ldots \subseteq T + H_1 \subseteq T + H_0 = T + A^{\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что $T + A^{\mathfrak{F}} = A$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть Σ – некоторое множество главных факторов мультикольца A, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные, N – идеал мультикольца A и Σ' – множество таких A/N-главных факторов $H/N/K/N$, что $H/K \in \Sigma$. Тогда, если B есть САРΣ-подалгебра в A, то $B + N/N$ есть САРΣ'-подалгебра в A/N.

Доказательство. Если $H/N/K/N \in \Sigma'$, то легко видно, что $H/K \in \Sigma$. Значит, подалгебра B изолирует H/K, т.е. справедливо включение: $H \cap B \subseteq K$. Отсюда теперь получаем следующие соотношения:

$$(H/N) \cap (B + N/N) = H \cap (B + N)/N =$$

$$= N + (H \cap B)/N \subseteq N + K/N = K/N.$$

Полагаем теперь, что (A/N)-главный фактор $H/N/K/N$ не принадлежит Σ'. Тогда H/K не принадлежит Σ. Следовательно, B покрывает фактор H/K. Значит, $H \subseteq B + K$. Тогда $H/N \subseteq B + K/N = (B + N/N) + (K/N)$. Последнее означает, что $B + N/N$ покрывает фактор $H/N/K/N$ в этом случае. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть Σ есть некоторое множество главных факторов мультикольца T, содержащее с каждым фактором и все ему проективные, A и B есть САРΣ-подалгебры мультикольца T и пусть

$$\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A,$$
$$\{0\} = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_m = B$$

композиционные ряды соответственно A и B. Тогда $n = m$ и между факторами этих рядов можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны.

Доказательство. Возьмем произвольный главный ряд

$$\{0\} = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_k = T$$

мультикольца T. Достаточно показать, что для любого $i \in \{1,2,\ldots k\}$ фактор $T_i \cap A / T_{i-1} \cap A$ изоморфен фактору $T_i \cap B / T_{i-1} \cap B$.

Если $T_i / T_{i-1} \in \Sigma$, то A и B его изолируют. Получаем следующие включения: $A \cap T_i \subseteq T_{i-1}$, $B \cap T_i \subseteq T_{i-1}$. Следовательно, $T_{i-1} + (T_i \cap A)/T_{i-1} \cong$ $\cong T_i \cap A / T_i \cap A \cap T_{i-1} = T_i \cap A / T_{i-1} \cap A$, $T_{i-1} + (T_i \cap A)/T_{i-1} = T_{i-1} / T_{i-1}$. Отсюда получаем следующий изоморфизм:

$$T_i \cap A / T_{i-1} \cap A \cong T_{i-1} / T_{i-1}.$$

Далее, $T_{i-1}+(T_i\bigcap B)/T_{i-1}=T_{i-1}/T_{i-1}$ и $T_{i-1}+(T_i\bigcap B)/T_{i-1}\cong T_i\bigcap B/T_{i-1}\bigcap B$, $T_i\bigcap B/T_{i-1}\bigcap B\cong T_{i-1}/T_{i-1}$. Значит, $T_i\bigcap A/T_{i-1}\bigcap A\cong$ $\cong T_i\bigcap B/T_{i-1}\bigcap B$. В этом случае теорема справедлива.

Пусть теперь $T_i\,/\,T_{i-1}$ не принадлежит Σ. Тогда получаем следующие включения: $T_i\subseteq T_{i-1}+A$, $T_i\subseteq T_{i-1}+B$. Следовательно,

$$T_i\bigcap A/T_{i-1}\bigcap A\cong T_{i-1}+(T_i\bigcap A)/T_{i-1}=T_i\bigcap(T_{i-1}+A)\,/\,T_{i-1}=T_i\,/\,T_{i-1}$$

$$\text{и}\quad T_i\bigcap B/T_{i-1}\bigcap B\cong T_i\bigcap(T_{i-1}+B)\,/\,T_{i-1}=T_i\,/\,T_{i-1}.$$

Значит $T_i\bigcap B/T_{i-1}\bigcap B$ изоморфна $T_i\bigcap A/T_{i-1}\bigcap A$ и в этом случае. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть Σ есть некоторое множество главных факторов конечного мультикольца A, содержащее с каждым фактором и все ему проективные, B есть САР Σ-подалгебра мультикольца A. Тогда порядок подалгебры B равен произведению порядков факторов A-главного ряда, не принадлежащих Σ.

Доказательство. Пусть мультикольцо A есть контрпример наименьшего порядка. Пусть

$$\{0\}=A_0\subset A_1=N\subset\ldots\subset A_t=A \qquad (1)$$

– некоторый A-главный ряд. Тогда

$$N/N=A_1/N\subset\ldots\subset A_t/N=A/N \qquad (2)$$

– главный ряд мультикольца A/N. Применяя теорему 4, получим, что $B+N/N$ есть Σ'-подалгебра в A/N. В силу индуктивных соображений получим следующее равенство:

$$|\,B+N/N\,|=|\,A_{i_1}/N/A_{i_1-1}/N\,|\times\ \ldots\ \times|\,A_{i_r}/N/A_{i_r-1}/N\,|,$$

где $A_{i_1}/N/A_{i_1-1}/N,\ldots,A_{i_r}/N/A_{i_r-1}/N$ – все факторы из ряда (2), которые подалгебра $B+N/N$ покрывает. По теореме 4 получаем, что подалгебра B покрывает факторы $A_{i_1}/A_{i_1-1},\ldots,A_{i_r}/A_{i_r-1}$ и изолирует остальные главные факторы ряда (1), за исключением, может быть, фактора $N/\{0\}$. Если $N/\{0\}\in\Sigma$, то $B\cap N=\{0\}$ и в этом случае имеем равенства:

$$|\,B\,|=|\,B/B\bigcap N\,|=|\,B+N/N\,|=|\,A_{i_1}/A_{i_1-1}\,|\times\ \ldots\times|\,A_{i_r}/A_{i_r-1}\,|.$$

Пусть теперь $N/\{0\}$ не принадлежит Σ. Значит, $N\subseteq B+\{0\}=B$. Тогда получим следующие равенства:

$$|\,B\,|=|\,B+N/N\,|\times|\,N\,|=|\,N\,|\times|\,A_{i_1}/A_{i_1-1}\,|\times\ldots\times|\,A_{i_r}/A_{i_r-1}\,|.$$

Полученное противоречие с допущением завершает доказательство теоремы 6. Из теоремы 6 вытекает следующий результат.

Следствие. САР Σ-подалгебры конечного мультикольца изоордны.

3. Пусть теперь Σ – множество главных факторов конечной группы G, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные. Подгруппа H группы G называется САР Σ-подгруппой, если она изолирует все факторы из Σ и покрывает остальные главные факторы группы G.

При определенных условиях $\mathfrak{F}$-нормализаторы [16], $\mathfrak{F}$-профраттиниевы и $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы [6, 9] являются CAPΣ-подгруппами при соответствующем выборе Σ. Более того, в ряде случаев понятие $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп и CAPΣ-подгрупп совпадают. Однако в общем случае это неверно – CAPΣ-подгруппы составляют более широкое, чем $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы, множество (см. [3], [15]).

Из вышеприведенных теорем вытекает следующий результат.

***Теорема** 7*. Пусть Σ – некоторое множество главных факторов конечной группы G, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если N – нормальная подгруппа в G, Σ' – множество факторов $H/N/K/N$ группы G/N, соответствующих факторам H/K из Σ, T есть CAPΣ-подгруппа в G, то TN/N есть CAPΣ-подгруппа в G/N;

2) если H и K есть CAPΣ-подгруппы группы G, то у любых двух композиционных рядов подгрупп H и K длины равны, а соответствующие факторы изоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Gaschütz, W.*** Praefrattinigruppen / W.Gaschütz // Arch. Math. – 1962 – B.13, № 3. – s. 418-426.
2. ***Hawkes, T.O.*** Analogues of Prefrattini subgroups / T.O. Hawkes // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups. – Canberra. – 1965, N.Y. – 1967. – p. 145-150.
3. ***Gillam, J.D.*** Cover-Avoid Subgroups in Finite Solvable Groups / J.D. Gillam // J. Algebra. – 1974. – v. 29, № 2. – p. 324-329.
4. ***Chambers, G.A.*** On $\mathfrak{F}$-prefrattini subgroups / G.A. Chambers // Canad. Math. Bull. – 1975. – v.15, № 3. – p. 345-348.
5. ***Гойко, В.И.*** Построение $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в произвольных конечных группах/ В.И. Гойко // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22. – № 2. – С. 687-689.
6. ***Гойко, В.И.*** $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы конечных групп / В.И. Гойко // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1996. – № 10. – С. 33-46.
7. ***Nakazato, H.*** Remarks on Prefrattini subgroups of a finite solvable group / H. Nakazato // Bull. Sci. and Eng. Div.: Univ. Rynkyns (Math. And Nat. Sci). – 1977. – № 4. – p. 17-20.
8. ***Förster, P.*** Prefrattini groups / P. Förster // J. Austral. Math. Soc. – 1983. – v. 34 (series A). – p. 234-247.
9. ***Гойко, В.И.*** О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгруппах конечных групп / В.И. Гойко, А.Н. Скиба // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 53-58.
10. ***Гойко, В.И.*** О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебрах алгебр Ли конечной длины / В.И. Гойко, А.Н.Скиба // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во "Университетское", 1987. – № 3. – С. 78–86.
11. ***Новиков, С.П.*** О Ω-профраттиниевых подалгебрах мультиколец / С.П.Новиков // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во "Университетское", 1992. – № 6. – С. 7-12.
12. ***Гойко, В.И.*** CAPΣ-подгруппы конечных групп / В.И.Гойко, С.П.Новиков //Международная математическая конференция, посвященная 100-летию начала работы Д.А.Граве, тезисы докл. – Киев, 2002. – С. 43-47.
13. ***Новиков, С.П.*** Связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр и $\mathfrak{F}$-нормализатров мультиколец / С.П. Новиков // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1996. – № 1. – С. 46-48.
14. ***Novikov, S.P.*** CAPΣ-subalgebras of multirings / S.P. Novikov // 4-th International Algebraic Conference in Ukraine. – Lviv. – 2003. – p. 161-162.
15. ***Новиков, С.П.*** Н-профраттиниевы подалгебры конечных мультиколец / С.П.Новиков // Известия Гомельского гос. университета. – № 5(38). – 2006. – С. 45-48.
16. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем. / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
17. ***Мальцев, А.И.*** Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 15.02.2007 г.