УДК 517.977.57

В.Г. ЗАМУРАЕВ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим метрическое пространство C_{ad} – множество допустимых управлений, вещественное сепарабельное гильбертово пространство F со скалярным произведением $[u,v]$ и гильбертовой нормой $|v|$ и семейство $\{F_c\}$, $c \in C_{ad}$ замкнутых подпространств пространства F. На пространстве F зададим линейный непрерывный функционал $l(v)$. Для каждого допустимого управления c рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$u_c \in F_c,\ [u_c,v] = l(v)\ \forall v \in F_c. \tag{1}$$

Пусть u_c^0 – решение уравнения (1). Зададим функционал $J(c,v)$: $J: C_{ad} \times F \to R$, обозначим $j(c) \equiv J(c,u_c^0)$ на C_{ad} и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на C_{ad} (задача (С)). Всякое решение c^* задачи (С): $c^* \in C_{ad}$, $j(c^*) = \min\limits_{C_{ad}} j(c)$ будем называть оптимальным управлением, а соответствующее этому управлению подпространство F_{c^*} пространства F – оптимальным пространством.

Достаточные условия разрешимости исследуемой задачи, возникшей как обобщение задач построения оптимальной области, рассмотренных в [1, 2], были впервые установлены автором в работе [3]. Настоящая работа посвящена анализу этих условий.

Пусть P_c – оператор ортогонального проектирования пространства F на подпространство F_c, а u^0 – решение уравнения

$$u \in F,\ [u,v] = l(v)\ \forall v \in F. \tag{2}$$

Связь между решениями u^0 и u_c^0 уравнений (2) и (1) соответственно устанавливает

Лемма 1 [3]. *Для любого допустимого управления* c $u_c^0 = P_c u^0$.

Примем следующие предположения:

1) C_{ad} – компакт;

2) из условий

$$c_n \in C_{ad},\ c_n \to c \in C_{ad}\ \ (\text{в } C_{ad}), \tag{3}$$

$$v \in F,\ P_{c_n} v \xrightarrow[w]{} \bar{v}\ \ (\text{слабо в } F) \tag{4}$$

следует $\bar{v} = P_c v$;

3) существует постоянная k_J, такая, что $J(c,v) \geq k_J\ \forall c \in C_{ad},\ \forall v \in F,\ k_J$ не зависит от c, v; выполняется неравенство Липшица $|J(c,v_1) - J(c,v_2)| \leq L_J |v_1 - v_2|\ \forall c \in C_{ad},\ \forall v_1, v_2 \in F$, где постоянная $L_J > 0$ не зависит от $c,\ v_1,\ v_2$; из условий (3) следует $\lim\limits_{n\to\infty} J(c_n, v) = J(c,v)\ \forall v \in F$.

Теорема [3]. *При сделанных предположениях задача (С) имеет, по крайней мере, одно решение.*

Лемма 2. *При предположении 2) из условий (3) и (4) следует*

$$P_{c_n} v \to P_c v\ (\text{в } F). \tag{5}$$

Доказательство. Условия (3), (4) и предположение 2) влекут за собой

$$P_{c_n} v \xrightarrow[w]{} P_c v. \tag{6}$$

Используя (6) и свойства проектора, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \left|P_{c_n} v\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \left[P_{c_n} v, P_{c_n} v\right] = \lim_{n\to\infty} \left[v, P_{c_n} v\right] =$$

$$= [v, P_c v] = [P_c v, P_c v] = |P_c v|^2,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \left|P_{c_n} v\right| = |P_c v|. \tag{7}$$

Сильная сходимость (5) следует из (6) и (7). Лемма доказана.

Для произвольного элемента $v \in F$ рассмотрим множество $G_{Pv} = \{(c, P_c v) | c \in C_{ad}\}$ с метрикой, индуцированной метрикой пространства $C_{ad} \times F$.

Лемма 3. *Предположения 1) и 2) равносильны компактности метрического пространства* $G_{Pv}\ \forall v \in F$.

Доказательство. Пусть выполнены предположения 1), 2). Рассмотрим произвольную последовательность $((c_n, P_{c_n} v)) \subset G_{Pv}$. Метрическое пространство C_{ad} – компакт, следовательно, последовательность $(c_n) \subset C_{ad}$ содержит подпоследовательность (которую снова обозначим через (c_n)), сходящуюся в C_{ad} к некоторому допустимому управлению c. Рассмотрим последовательность $(P_{c_n} v)$, соответствующую сходящейся последовательности (c_n). Из неравенства $\left|P_{c_n} v\right| \leq |v|\ \forall n$ в силу слабой компактности замкнутого шара в гильбертовом пространстве F следует, что из последовательности $(P_{c_n} v)$ можно выделить подпоследовательность (которую опять обозначим через $(P_{c_n} v)$), слабо сходящуюся в F к некоторому элементу $\bar{v}$. Таким образом, учитывая, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности (c_n) сходится к тому же пределу, имеем $c_n \to c \in C_{ad}$, $P_{c_n}v \xrightarrow[w]{} v$. Тогда, согласно лемме 2, $P_{c_n}v \to P_c v$. Таким образом, $(c_n, P_{c_n}v) \to (c, P_c v) \in G_{Pv}$, и компактность пространства G_{Pv} доказана.

Пусть G_{Pv} – компакт $\forall v \in F$. Рассмотрим произвольную последовательность допустимых управлений (c_n) и соответствующую ей последовательность $((c_n, P_{c_n}v)) \subset G_{Pv}$. Последовательность $((c_n, P_{c_n}v))$ содержит подпоследовательность (которую снова обозначим через $((c_n, P_{c_n}v))$), сходящуюся в $C_{ad} \times F$ к некоторому $(c, P_c v) \in G_{Pv}$. Следовательно, $c_n \to c \in C_{ad}$, и, значит, C_{ad} – компакт.

Если $c_n \to c \in C_{ad}$, $P_{c_n}v \xrightarrow[w]{} \bar{v}$, то рассматривая последовательность $((c_n, P_{c_n}v))$, извлекая из нее подпоследовательность (которую снова обозначим через $((c_n, P_{c_n}v))$), сходящуюся к некоторому $(c, P_c v) \in G_{Pv}$, и, учитывая, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности (c_n) сходится к тому же пределу, получим $c_n \to c \in C_{ad}$, $P_{c_n}v \to P_c v$. Являясь подпоследовательностью последовательности, слабо сходящейся в F к элементу $\bar{v}$, последовательность $(P_{c_n}v)$ сходится к тому же элементу. Таким образом, $\bar{v} = P_c v$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Begis D., Glowinski R.*** Application de la methode des elements finis a l'approximation d'un probleme de domaine optimal. Methodes de resolution des problemes approches // Applied Mathematics and Optimization. – 1975. – 2, № 2. – P. 130-169.
2. ***Авакян А.В., Филиппов В.М.*** Существование оптимальных областей в задачах с В-симметричными, В-положительными операторами // Дифференциальные уравнения. – 1992. – 28, № 12. – С. 2123-2128.
3. ***Замураев В.Г.*** О существовании оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2002. – 38. – № 7. – С. 982-985.

SUMMARY

The conditions, sufficient for the resolvability of a general space optimization problem with linear functional state equations, are analyzed. Equivalence of some of these conditions to the compacity of the metrical space, the goal functional is being minimized on, is established.