УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

О РАЗЛОЖЕНИЯХ В ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ ГРУППЕ ПОСТА

Изучается связь между разложением n-арной группы по ее n-арной подгруппе на левые (правые) смежные классы и разложениями некоторых подмножеств в универсальной обертывающей группе Поста этой n-арной группы на непересекающиеся подмножества. С этой целью для всякой n-арной подгруппы < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > в универсальной обертывающей группе Поста A^* выделяется подгруппа $B^*(A)$, изоморфная группе B^*, а в соответствующей группе A_o выделяется подгруппа $B_o(A)$, изоморфная группе B_o, и доказывается, что всякому разложению < A, [ ] > по < B, [ ] > на левые (правые) смежные классы соответствует некоторое разложение группы A^* по подгруппе $B_o(A)$ на левые (правые) смежные классы. В качестве следствия основного результата установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством всех левых (правых) смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > и множеством всех левых (правых) смежных классов A_o по $B_o(A)$.

Для всякой n-арной группы < A, [ ] > Пост определил [1] универсальную обертывающую группу $A^* = F_A/\theta_A$, где F_A – свободная полугруппа над алфавитом A, θ_A – отношение эквивалентности, определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Группа A^* является объединением непересекающихся множеств

$$A^{(k)} = \{\theta_A(a_1 \ldots a_k) \mid a_1, \ldots, a_k \in A\},\ A^{(i)} \cap A^{(j)} = \varnothing\ (i \neq j),$$

где k = 1, ..., n - 1. Множество $A^{(n-1)}$, обозначаемое чаще символом A_o, является нормальной подгруппой в A^* и называется соответствующей группой для < A, [ ] >.

Для всякого подмножества B n-арной группы < A, [ ] > полагают [2]:

$$B^{(i)}(A)=\{\theta_A(\alpha) \in A^{(i)} \mid \exists\ b_1,\ldots,b_i \in B,\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_i\},\ i = 1, \ldots, n - 1;$$

$$B_o(A) = B^{(n-1)}(A) = \{\theta_A(\alpha) \in A_o \mid \exists\ b_1,\ldots, b_{n-1} \in B,\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_{n-1}\};$$
$$B^*(A) = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid \exists\ b_1,\ldots, b_i \in B\ (i \geq 1),\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_i\}.$$

Ясно, что $B^*(A) \subseteq A^*$, $B_o(A) \subseteq A_o$, в частности, $A^*(A) = A^*$, $A_o(A) = A_o$.

Если < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, то $B^*(A)$ – подгруппа группы A^*, изоморфная группе B^*, а $B_o(A)$ – подгруппа группы A_o, изоморфная группе B_o [2].

В данной работе устанавливается связь между разложением n-арной группы < A, [ ] > по ее n-арной подгруппе < B, [ ] > и разложениями множеств $A^{(k)}$ на непересекающиеся подмножества. Как следствия получены соответствия между разложением < A, [ ] > по < B, [ ] > и разложениями A_o по $B_o(A)$ и A^* по $B_o(A)$. Отметим, что о связи между разложением A^* по $B_o(A)$ и разложением < A, [ ] > по < B, [ ] > писал Пост [1, с. 223], отождествляя при этом $B_o(A)$ и B_o.

Теорема 1. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, $k \in \{1, \ldots, n - 1\}$, $b_1, \ldots, b_{k-1}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если

$$A = \bigcup_{i \in I} [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \tag{1.1}$$

– разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, то

$$A^{(k)} = \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \tag{1.2}$$

– разложение $A^{(k)}$ на непересекающиеся подмножества, а отображение

$$[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \tag{1.3}$$

является биекцией множества всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > на множество

$$\{\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \mid i \in I\}; \tag{1.4}$$

2) если (1.2) – разложение $A^{(k)}$ на непересекающиеся подмножества, то (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, а отображение

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \to [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \tag{1.5}$$

является биекцией множества (1.4) на множество всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] >.

Доказательство. 1) Пусть $\theta_A(a_1 \ldots a_k)$ – произвольный элемент из $A^{(k)}$. Для фиксированных $b_1, \ldots, b_{k-1} \in B$ найдется $y \in A$ такой, что

$$\theta_A(a_1 \ldots a_k) = \theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}). \tag{1.6}$$

Если $b_k, \ldots, b_{n-1} \in B$, то по условию $[yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}] \in [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$ для некоторого $i \in I$, откуда

$$[yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}] = [x_i b_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-2}b]$$

для некоторого $b \in B$. Тогда

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2}b),$$

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-2}b),$$
$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) = \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-2}b)\,\theta_A^{-1}\,(b_k \ldots b_{n-1}),$$
$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) \in \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A),$$

откуда и из (1.6) следует $\theta_A(a_1 \ldots a_k) \in \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A)$. Следовательно,

$$A^{(k)} \bigcup_{i\in I} \subseteq \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A).$$

Обратное включение

$$\bigcup_{i\in I} \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \subseteq A^{(k)}$$

очевидно. Таким образом, доказано равенство (1.2).

Предположим, что

$$\theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \cap \theta_A(x_jb_1 \ldots b_{k-1})B_o(A) \neq \varnothing,\ i \neq j,$$

т.е.

$$\theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(c_1 \ldots c_{n-1}) = \theta_A(x_jb_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(d_1 \ldots d_{n-1})$$

для $c_1, \ldots, c_{n-1}, d_1, \ldots, d_{n-1} \in B$. Тогда

$$\theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(c_1 \ldots c_{n-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_jb_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(d_1 \ldots d_{n-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-1})$$

для любых $b_k, \ldots, b_{n-1} \in B$. Так как

$$b_1 \ldots b_{k-1}c_1 \ldots c_{n-1}b_k \ldots b_{n-1}\theta_A\, c'_1 \ldots c'_{n-1},\ b_1 \ldots b_{k-1}d_1 \ldots d_{n-1}b_k \ldots b_{n-1}\theta_A\, d'_1 \ldots d'_{n-1}$$

для некоторых $c'_1, \ldots, c'_{n-1}, d'_1, \ldots, d'_{n-1} \in B$, то из последнего равенства следует

$$\theta_A(x_i)\theta_A(c'_1 \ldots c'_{n-1}) = \theta_A(x_j)\theta_A(d'_1 \ldots d'_{n-1}),$$

откуда

$$\theta_A(x_ic'_1 \ldots c'_{n-1}) = \theta_A(x_jd'_1 \ldots d'_{n-1}),\ [x_ic'_1 \ldots c'_{n-1}] = [x_jd'_1 \ldots d'_{n-1}].$$

Последнее равенство противоречит тому, что (1.1) – разложение $< A, [\ ] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\ ] >$. Следовательно, (1.2) является разложением $A^{(k)}$ на непересекающиеся множества.

Из доказанного следует, что (1.3) – биекция.

2) Пусть a – произвольный элемент из A. Тогда, если зафиксировать $b_k, \ldots, b_{n-1} \in B$, то найдется $y \in A$ такой, что

$$a = [yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}]. \qquad (1.7)$$

В силу условия, $\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) \in \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})B_o(A)$ для которого $i \in I$, откуда

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) = \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}b)$$

для некоторого $b \in B$. Тогда

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}b)\theta_A(b_k \ldots b_{n-1}),$$
$$[yb_1 \ldots b_{n-1}] = [x_ib_1 \ldots b_{k-1}b_1 \ldots b_{n-2}bb_k \ldots b_{n-1}],$$

откуда и из (1.7) следует $a \in [x_i\underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$. Следовательно, $A \subseteq [x_i\underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$. Обратное включение $\bigcup_{i\in I} [x_i\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \subseteq A$ очевидно. Таким образом, доказано равенство (1.1).

Предположим, что

$$[x_i\underbrace{B \dots B}_{n-1}] \cap [x_j\underbrace{B \dots B}_{n-1}] \neq \varnothing,\ i \neq j,$$

т. е. $[x_i c_1 \dots c_{n-1}] = [x_j d_1 \dots d_{n-1}]$ для $c_1, \dots, c_{n-1}, d_1, \dots, d_{n-1} \in B$. Так как

$$c_1 \dots c_{n-1}\theta_A b_1 \dots b_{k-1} c'_k \dots c'_{n-1},\ d_1 \dots d_{n-1}\theta_A b_1 \dots b_{k-1} d'_k \dots d'_{n-1}$$

для некоторых $c'_k, \dots, c'_{n-1}, d'_k, \dots, d'_{n-1} \in B$, то из последнего равенства следует

$$\theta_A(x_i b_1 \dots b_{k-1})\theta_A(c'_k \dots c'_{n-1}) = \theta_A(x_j b_1 \dots b_{k-1})\theta_A(d'_k \dots d'_{n-1}),$$

$$\theta_A(x_i b_1 \dots b_{k-1})\theta_A(c'_k \dots c'_{n-1})\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}) =$$

$$= \theta_A(x_j b_1 \dots b_{k-1})\theta_A(d'_k \dots d'_{n-1})\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}),$$

$$\theta_A(x_i b_1 \dots b_{k-1})B_0(A) \cap \theta_A(x_j b_1 \dots b_{k-1})B_0(A) \neq \varnothing,$$

что противоречит условию.

Из доказанного следует, что (1.5) – биекция. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается двойственная к ней

Теорема 2. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, $b_1, \dots, b_{k-1}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если

$$A = \bigcup_{i \in I} [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \tag{2.1}$$

– разложение $< A, [\ ] >$ на непересекающиеся правые смежные классы по $< B, [\ ] >$, то

$$A^{(k)} = \bigcup_{i \in I} B_0(A)\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}x_i) \tag{2.2}$$

– разложение $A^{(k)}$ на непересекающиеся подмножества, а отображение

$$[\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \to B_0(A)\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}x_i) \tag{2.3}$$

является биекцией множества всех правых смежных классов $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$ на множество

$$\{B_0(A)\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}x_i) \mid i \in I\}; \tag{2.4}$$

2) если (2.2) – разложение $A^{(k)}$ на непересекающиеся подмножества, то (2.1) – разложение $< A, [\ ] >$ на непересекающиеся правые смежные классы по $< B, [\ ] >$, а отображение

$$B_0(A)\theta_A(b_1 \dots b_{k-1}x_i) \to [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \tag{2.5}$$

является биекцией множества (2.4) на множество всех правых смежных классов $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$.

Ясно, что отображения (1.3) и (1.5) являются взаимно обратными. То же самое можно сказать об отображениях (2.3) и (2.5).

Полагая в теореме 1 $k = n - 1$, получим

Следствие 1. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $b_1, \dots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, то

$$A_o = \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

– разложение A_o на непересекающиеся левые смежные классы по $B_o(A)$, а отображение

$$[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

является биекцией множества всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > на множество всех левых смежных классов A_o по $B_o(A)$;

2) если равенство из 1) является разложением A_o на непересекающиеся левые смежные классы по $B_o(A)$, то (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, а отображение

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) \to [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$$

является биекцией множества всех левых смежных классов A_o по $B_o(A)$ на множество всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] >.

Полагая в теореме 2 k = n - 1, получим

Следствие 2. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (2.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >, то

$$A_o = \bigcup_{i \in I} B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i)$$

– разложение A_o на непересекающиеся правые смежные классы по $B_o(A)$, а отображение

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_i] \to B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i)$$

является биекцией множества всех правых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > на множество всех правых смежных классов A_o по $B_o(A)$;

2) если равенство из 1) является разложением A_o на непересекающиеся правые смежные классы по $B_o(A)$, то (2.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >, а отображение

$$B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i) \to [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x_i]$$

является биекцией множества всех правых смежных классов A_o по $B_o(A)$ на множество всех правых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] >.

Замечание 1. Утверждения 1) из следствий 1 и 2 доказаны в [3].

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 3. Индекс n-арной подгруппы < B, [ ] > в n-арной группе < A, [ ] > совпадает с мощностями множеств (1.4) и (2.4).

В частности, из следствия 1 (также из следствия 2) вытекает

Следствие 4 [3]. Индекс n-арной подгруппы < B, [ ] > в n-арной группе < A, [ ] > совпадает с индексом подгруппы $B_o(A)$ в группе A_o: $|A : B| = |A_o : B_o(A)|$.

Полагая в теореме 1 k = 1, получим

Следствие 5. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Тогда:

1) если (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, то $A^{(1)} = \bigcup\limits_{i\in I} \theta_A(x_i)B_o(A)$ – разложение $A^{(1)}$ на непересекающиеся подмножества, а отображение $[x_i\underbrace{B\dots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_i)B_o(A)$ является биекцией множества всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > на множество $\{\theta_A(x_i)B_o(A) \mid i \in I\}$;

2) если равенство из 1) является разложением $A^{(1)}$ на непересекающиеся подмножества, то (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, а отображение $\theta_A(x_i)B_o(A) \to [x_i\underbrace{B\dots B}_{n-1}]$ является биекцией множества из 1) на множество всех левых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] >.

Полагая в теореме 2 k = 1, получим

Следствие 6. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Тогда:

1) если (2.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >, то $A^{(1)} = \bigcup\limits_{i\in I} B_o(A)\theta_A(x_i)$ – разложение $A^{(1)}$ на непересекающиеся подмножества, а отображение $[\underbrace{B\dots B}_{n-1}x_i] \to B_o(A)\theta_A(x_i)$ является биекцией множества всех правых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] > на множество $\{B_o(A)\theta_A(x_i) \mid i \in I\}$;

2) если равенство из 1) является разложением $A^{(1)}$ на непересекающиеся подмножества, то (2.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >, а отображение $B_o(A)\theta_A(x_i) \to [\underbrace{B\dots B}_{n-1}x_i]$ является биекцией множества из 1) на множество всех правых смежных классов < A, [ ] > по < B, [ ] >.

Замечание 2. Замена в утверждении 2) теоремы 1 разложения (1.2) на разложение

$$A^{(k)} = \bigcup_{i\in I} \theta_A(x_{i1}\dots x_{ik})B_o(A),\ \theta_A(x_{i1}\dots x_{ik})B_o(A)\cap A(x_{j1}\dots x_{jk})B_o(A) = \varnothing,\ i\neq j$$

не приводит к более общей ситуации, так как в этом случае для фиксированных $b_1, \dots b_{k-1} \in B$ найдутся $x_i \in A$ $(i \in I)$ такие, что $\theta_A(x_{i1}\dots x_{ik}) = \theta_A(x_ib_1\dots b_{k-1})$. Поэтому записанное выше разложение совпадает с разложением (1.2).

То же самое можно сказать о разложении (2.2) из утверждения 2) теоремы 2.

Замечание 3. В приведенных выше разложениях только при k = n - 1 речь идет о разложении группы по подгруппе, так как $B_o(A)$ – подгруппа группы $A_o = A^{(n-1)}$. Во всех остальных случаях нельзя говорить даже о разложении множества по подмножеству, так как $B_o(A)$ не является подмножеством в $A^{(k)}$ для любого k = 1, ..., n - 2.

Так как $A^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A^{(k)}$, то теоремы 1 и 2 позволяют по разложению < A, [ ] > по < B, [ ] > получать разложения A^* по $B_0(A)$.

Теорема 3. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >, то

$$A^* = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigcup_{i \in I} \theta_A x_i b_1 \ldots b_{k-1}) B_0(A) \right)$$

– разложение A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B_0(A)$;

2) если равенство из 1) является разложением A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B_0(A)$, то (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >.

Доказательство. 1) Следует из 1) теоремы 1 и равенств $A^{(k)} \cap A^{(m)} = \varnothing$, где $m \neq k$.

2) Если предположить, что $\bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i)B_0(A) \neq A^{(1)}$, т.е. $\bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i)B_0(A) \subset A^{(1)}$, то из

$$A^* = \bigcup_{k=1}^{n-1} A^{(k)}, \ A^{(k)} \cap A^{(m)} = \varnothing, \ k \neq m$$

вытекает

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1}) B_0(A) \right) \subset A^*,$$

что противоречит равенству из 1). Следовательно, $\bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i)B_0(A) = A^{(1)}$. Точно так же $\bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{k-1})B_0(A) = A^{(k)}$. Применяя к любому из полученных равенств утверждение 2) теоремы 1, видим, что (1.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся левые смежные классы по < B, [ ] >. Теорема доказана.

Двойственной к теореме 3 является

Теорема 4. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (2.1) - разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >, то

$$A^* = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_0(A)\, \theta_A(b_1 \ldots b_{k-1} x_i) \right)$$

– разложение A^* на непересекающиеся правые смежные классы по $B_0(A)$;

2) если равенство из 1) является разложением A^* на непересекающиеся правые смежные классы по $B_0(A)$, то (2.1) – разложение < A, [ ] > на непересекающиеся правые смежные классы по < B, [ ] >.

Предложение. Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, $x \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Тогда:

$$\theta_A(xb_1 \ldots b_i)B_o(A) = \theta_A(xc_1 \ldots c_i)B_o(A),\ B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_ix) = B_o(A)\theta_A(c_1 \ldots c_ix)$$

для любых $b_1, \ldots, b_i, c_1, \ldots, c_i \in B$.

Доказательство. В B существуют элементы $b_{i+1}, \ldots, b_n$ такие, что

$$b_1 = [c_1 \ldots c_ib_{i+1} \ldots b_n].$$

Тогда

$$\theta_A(xb_1 \ldots b_i)B_o(A) = \theta_A(x[c_1 \ldots c_ib_{i+1} \ldots b_n]b_2 \ldots b_i)B_o(A) =$$
$$= \theta_A(xc_1 \ldots c_i)\theta_A(b_{i+1} \ldots b_nb_2 \ldots b_i)B_o(A) = \theta_A(xc_1 \ldots c_i)B_o(A),$$

т. е. верно первое равенство.

Второе равенство доказывается аналогично. Предложение доказано.

Замечание 4. Предложение показывает, что в формулировке теоремы 1 элементы $b_1, \ldots, b_{k-1} \in B$ можно не фиксировать, а разложение (1.2) можно записать в виде

$$A^{(k)} = \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_ib_{i1} \ldots b_{i(k-1)})B_o(A),$$

где $b_{i1}, \ldots, b_{i(k-1)}$ – произвольные из B.

Сказанное справедливо также для теоремы 2, следствий 1 и 2 и теорем 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208-350.
2. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с
3. ***Гальмак, А.М.*** О теореме Шура для n-арных групп / А.М. Гальмак // Укр. мат. журнал. – 2006. – № 6. – С. 730-741.

Поступила в редакцию 27.09.2005.