УДК 517.925.42

Л.А. ЧЕРКАС, И.Н. СИДОРЕНКО

ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ДВУМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В статье рассматривается система Льенара в случае двух состояний равновесия, когда функция трения есть многочлен четвертой степени общего вида, а функция упругости многочлен второй степени. В этом случае состояния равновесия – седло и антиседло, можно поместить, соответственно, в точки O (0, 0) и E (1, 0). Численный эксперимент показывает, что у такой системы возможны три предельных цикла, окружающих одно состояние равновесия. Сформулирована и доказана теорема, позволяющая использовать прогноз Смейла для оценки максимального числа предельных циклов данной системы. Доказанная теорема и проведенный численный эксперимент позволяют сделать окончательный вывод: система рассматриваемого вида может иметь три предельных цикла, а если предположить верной гипотезу Смейла, то это максимально возможное количество предельных циклов у такой системы. Описан алгоритм построения систем указанного вида, у которых есть ровно три предельных цикла.

Обнаружение предельных циклов в полиномиальных системах дифференциальных уравнений является самостоятельной научной задачей, известной в математике, как шестнадцатая проблема Гильберта. Задача состоит в том, чтобы для системы двух дифференциальных уравнений, имеющей в правой части полиномы от двух переменных степени не выше m

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{1}$$

найти условия, при которых данная система имеет определенное наперед заданное количество предельных циклов, и установить наибольшее возможное для данного m число $H(m)$ предельных циклов.

Будем рассматривать простейшие полиномиальные системы Льенара с тремя предельными циклами. Пусть система Льенара имеет две особые точки – седло и антиседло, функция упругости (восстанавливающая сила) – полином второй степени, функция трения (сила трения) – четвертой. Тогда состояния равновесия в рассматриваемом случае – седло и антиседло, можно поместить соответственно в точки $O(0,0)$ и $E(1,0)$, и система примет вид

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=x(x-1)-\left(\sum_{i=1}^{5}a_ix^{i-1}\right)y. \tag{2}$$

Она может иметь три малоамплитудных предельных цикла [1].

По гипотезе Смейла [2], система Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{3}$$

при $g(x)=x$, $F(x)$ – полиномом степени $2k+1$, $F(0)=0$, имеет не более k предельных циклов. Более точно, число предельных циклов системы (3) не превосходит числа положительных нулей функции $\varphi(x)=F(x)-F(-x)$. Если $g(x)\neq x$, то, рассмотрим преобразование

$$u=\sqrt{2G(x)}sign(x)=\psi(x), \tag{4}$$

где $G(x)=\int_0^x g(z)dz$.

Продифференцировав (4) по x, получим: $udu=g(x)dx$, откуда

$$dx=\frac{udu}{g(x)}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (3), получим систему:

$$\frac{du}{dt}=(y-F(x(u)))\frac{g(x)}{u},\quad \frac{dy}{dt}=-g(x). \tag{6}$$

Умножим правые части системы (6) на $\frac{u}{g}$. Заметим, что умножение правых частей на некоторую положительную функцию не изменяет числа предельных циклов, которые при этом не поменяют своей формы, изменится лишь закон движения точки $x=\eta(t)$, $y=\mu(t)$ по предельному циклу. В результате получим систему:

$$\frac{du}{dt}=y-\tilde{F}(u),\ \frac{dy}{dt}=-u, \tag{7}$$

где $\tilde{F}(u)=F(x(u))$ и $g(u)=u$. Если функция $\tilde{F}(u)$ хорошо аппроксимируется полиномом невысокой степени в полосе $u_1<u<u_2$ плоскости $u0y$, в которой находятся предельные циклы, то можем использовать прогноз Смейла, оценив число положительных нулей функции $\tilde{F}(u)-\tilde{F}(-u)$. Оно равно числу решений системы:

$$F(x)=F(y),\quad G(x)=G(y),\quad x>0,\quad y<0. \tag{8}$$

Система (2) с $g(x)=x(1-x)$, $f(x)=\sum_{j=1}^{5}a_jx^{j-1}$ приводится к системе (3) с $F(x)=\int_1^x f(z)dz$. Тогда преобразование $u=\sqrt{2G(x)}sign(x-1)$, где $G(x)=\int_1^x g(z)dz$ приводит ее к системе (7), а соответствующая система (8) рассматривается в области $0<x<1,\ y>1$. Исследование системы (8) в этой области упрощается, если ввести замену $x=py,\ 0<p<1$. Тогда из второго уравнения в (8) находим $y=\frac{3}{2}\frac{p+1}{p^2+p+1}$, $x=\frac{3}{2}\frac{p(p+1)}{p^2+p+1}$. Подставляя найденные x, y в первое уравнение системы (8), получим уравнение

$$\Phi(p)=a_1+(a_2+a_3)\varphi_3(p)+a_4\varphi_4(p)+a_5\varphi_5(p)=0. \tag{9}$$

При $a_2+a_3\neq 0$ оно приводится к виду:

$$A_1=\varphi_3(p)+A\varphi_4(p)+B\varphi_5(p), \tag{10}$$

где $A_1=\frac{-a_1}{a_2+a_3}$, $A=\frac{a_4}{a_2+a_3}$, $B=\frac{a_5}{a_2+a_3}$.

Обозначим правую часть уравнения (10) через $f_0(p,A,B)$. Итак, получили трехпараметрическое семейство уравнений $f_0(p,A,B)=A_1$, число решений которых не превосходит $k+1$, где k – число экстремумов функции $f_0(p,A,B)$, $0<p<1$. Экстремумы этой функции при изменении параметров A, B, A_1 могут исчезать через образование трехкратных нулей уравнения (10) и через концы промежутка $0<p<1$, то есть через точки $p=0,\ p=1$. В связи с этим, введем в рассмотрение прогнозные кривые: трехкратных предельных циклов – $3LCp$, кратных сепаратрисных циклов типа петля – $WSCp$, а также кривую кратных фокусов – WF.

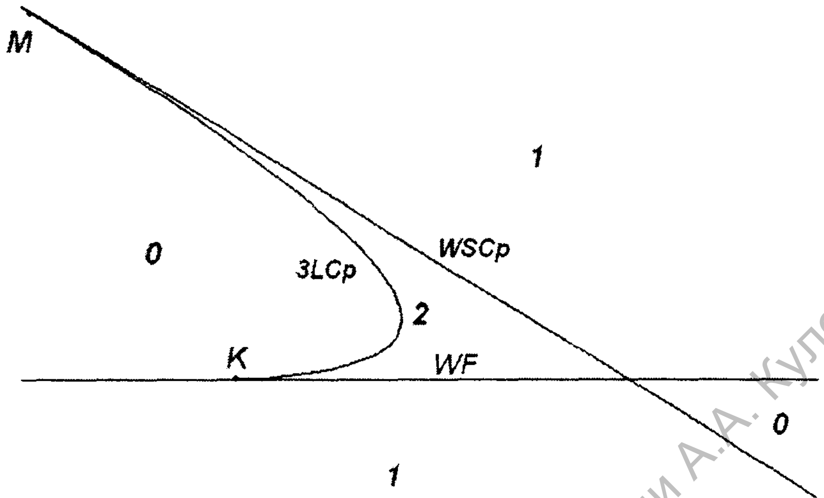
Прогнозную кривую $3LCp$ в плоскости параметров A и B определим как множество точек (A, B), полученных из системы

$$\varphi_3'(p)+A\varphi_4'(p)+B\varphi_5'(p)=0,\ \varphi_3''(p)+A\varphi_4''(p)+B\varphi_5''(p)=0,$$

при различных $p\in(0,\ 1)$. Прогнозную кривую $WSCp$ определим из условия $div\, v(O)=0$, где v – векторное поле системы (2), что соответствует уравнению $\varphi_3(0)+A\varphi_4(0)+B\varphi_5(0)=0$. Наконец, кривая кратных фокусов определяется из условия $g_3=0$, где g_3 – первая фокусная величина, что на плоскости параметров A и B соответствует уравнению $\varphi_3''(1)+A\varphi_4''(1)+B\varphi_5''(1)=0$.

Все указанные кривые (две из них прямые) изображены на рис.1.

Концы K и M кривой $3LCp$ лежат соответственно на кривых WF, $WSCp$. Все кривые разбивают плоскость (A, B) на пять областей, в каждой из которых функция имеет постоянное число экстремумов (оно отмечено на рис. 1 числами 0, 1, 2). Таким образом доказана следующая теорема:



Теорема. *Число решений уравнения (10) при* $0 < p < 1$ *и* $a_2 + a_3 \neq 0$ *не превышает трех.*

Непосредственно из теоремы следует

Следствие: *число предельных циклов системы (2), с учетом прогноза Смейла [2], не превышает трех.*

Покажем, что такие системы существуют. Для этого рассмотрим уравнение (9)

$$\Phi(p) = a_1 + (a_2 + a_3)\varphi_3(p) + a_4\varphi_4(p) + a_5\varphi_5(p) = 0$$

Нетрудно убедится, что многочлены $\varphi_k(p)$ образуют систему функций Чебышева, т.е. $\det(\varphi_i(p_k)) \neq 0$, $i = \overline{3,5}$, для любых различных $p_k \in (0; 1)$, $k = \overline{1,3}$.

Выбирая значения $p_k \in (0; 1)$, $k = \overline{1,3}$, получаем систему из трех уравнений, в которых в качестве неизвестных выступают коэффициенты a_k, $k = \overline{1,5}$. В этой системе уравнений a_1 выбирается произвольным образом. В результате можем подобрать коэффициенты a_k, $k = \overline{1,5}$, так, чтобы получить три положительных нуля нечетной части функции $\widetilde{F}(u)$ для любого набора $p_k \in (0; 1)$, $k = \overline{1,3}$, и это по доказанной теореме максимальное число положительных нулей нечетной части функции $\widetilde{F}(u)$, которое можно получить в рассматриваемом случае.

Численный эксперимент показывает, что система (2), построенная по вышеуказанному алгоритму, может иметь три предельных цикла, например, при $a_1 = 10^{-5}$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0{,}9694$, $a_4 = -2{,}8391$, $a_5 = -3{,}8675$.

Доказанная теорема и проведенный численный эксперимент позволяют сделать окончательный вывод: система вида (2) может иметь три предельных цикла, и если гипотеза Смейла верна, то это максимально возможное количество предельных циклов у такой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Christopher, C.J.*** Small-amplitude limit cycles bifurcation for Lienard systems with quadraric or cubic dambing or restoring forces / C.J. Christopher, S. Lunch. Nonlinearity, 12 (1999). – P. 1099-1112.
2. ***Smale, S.*** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer 20. – № 2 (1998), 7-15.
3. ***Эрроусмит, Д.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М.: Мир, 1986. – 288 с.: ил.
4. ***Атаманов, П.С.*** Аналитические и численные методы исследования предельных циклов динамических систем / П.С. Атаманов, В.П. Желтов. – Чебоксары, 1998. – 144 с.
5. ***Гаврилов, Н.И.*** Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Гаврилов. – М.: Высшая школа, 1962. – 314 с.: ил.
6. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М.: Наука, 1967. – 488 с.: ил.
7. ***Баутин, Н.Н.*** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.: ил.
8. ***Андронов, А.А.*** Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Е. Хайкин. – М.: ФИЗМАТГИЗ. – 916 с.: ил.

Поступила в редакцию 09.03.2006 г.