УДК 511.36

Н.В. ШАМУКОВА, Д.В. ДУДКО

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА-СПРИНДЖУКА ДЛЯ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В статье доказан аналог теоремы Малера-Спринджука для целых алгебраических чисел, связанный с классификацией действительных и комплексных чисел. Согласно классификации Малера, все действительные числа попадают в один и тот же класс, если минимальное значение целочисленных полиномов в этих точках имеет один и тот же порядок малости относительно высоты этих полиномов. Аналогичная проблема для целых алгебраических чисел до сих пор рассматривалась только в частном случае, в работе впервые получено не только значение меры множеств действительных и комплексных чисел с заданным порядком приближаемых целыми алгебраическими числами, но и полный аналог классической теоремы А.Я. Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. Доказательство основано на построении оптимальной регулярной системы и обобщении метода существенных и несущественных областей, разработанного В.Г. Спринджуком.

Пусть $Z_n(\omega)$ обозначает множество всех вещественных чисел ξ таких, что для любого $\omega' < \omega$ существует бесконечно много полиномов $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами степени не выше n, удовлетворяющих неравенству

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \text{ где } H(P) = \max_{1 \le i \le n} |a_i| \text{ – высота } P(x).$$

Далее, пусть $Z_n'(\omega)$ – подмножество в $Z_n(\omega)$, состоящее из всех $\xi \notin Z_n(\omega_1)$ для любого $\omega_1 > \omega$. К. Малер называет трансцендентное число ξ соответственно S-,T- или U-числом в зависимости от значений $\omega_n(\xi) = \sup\{\omega : \xi \in Z_n(\omega)\}$, $\mu_n(\xi) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\omega_n(\xi)}{n}$.

Пользуясь принципом ящиков Дирихле, несложно проверить, что $\mu_n \ge 1$ (и, следовательно, $\omega_n(\xi) \ge n$) для любого трансцендентного ξ. Поэтому $Z_n(n)$ содержит все действительные числа.

В 1932 г. К. Малер [4] установил, что почти все числа (в смысле меры Лебега) попадают в класс S-чисел. Результат К. Малера о мере множества S-чисел выражался неравенством $\mu_n(\xi) \le 4$, в то время, как по гипотезе К. Малера, $\mu_n(\xi) \le 4$ в силу $\mu_n \ge 1$ $(\omega_n(\xi) \ge n)$.

Первое подтверждение гипотезы К. Малера для n =2 получил Й.П. Кубилюс [3] в 1949 г., а завершил ее доказательство для произвольного n В.Г. Спринджук. [6] в 1964 г. Таким образом, для $\omega > n$ множество $Z_n(\omega)$ имеет нулевую меру Лебега.

В последнее время весьма популярной стала задача о приближении действительных чисел алгебраическими и целыми алгебраическими числами. Однако к настоящему времени аналог гипотезы Малера для целых алгебраических чисел доказан только для полиномов третьей степени [8].

В данной работе мы обобщаем этот результат на полиномы произвольной степени.

Пусть

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ –} \tag{1}$$

полином с целыми коэффициентами, $H = H(P) = \max\limits_{1 \le j \le n-1} |a_j|$ – высота *P(x)*, $\varepsilon > 0$, μA – мера Лебега множества $A \subset R$, $I \subset R$ – некоторый интервал.

Теорема. *Для почти всех x неравенство*

$$|P(x)| < H^{-n+1-\varepsilon} \tag{2}$$

имеет лишь конечное число решений в полиномах $P_n(x)$.

Предварительно введем необходимые обозначения и приведем леммы, необходимые для доказательства.

Через $c(n)$ будем обозначать положительную величину, зависящую от n. При этом формально считаем, что $c(n)c(n) = c(n)$, $c(n) + c(n) = c(n)$.

Пусть ε – произвольное, но в дальнейшем фиксированное число. Корни χ полиномов P разобьем на классы (ε-классы) следующим образом.

Пусть $\chi_1 = \chi$, $\chi_2, \ldots, \chi_k$ – все корни полинома P, минимального для χ, лежащие в верхней полуплоскости и удовлетворяющие условию

$$|\chi_1 - \chi_2| \le |\chi_1 - \chi_3| \le \ldots \le |\chi_1 - \chi_k| < 1. \tag{3}$$

Считаем, что $k \ge 2$. Положим *H=H(P)*,

$$m = \left[\tfrac{n}{\varepsilon}\right] + 1, \ |\chi_1 - \chi_j| = h^{-\rho_i} \quad (i = 2, 3, \ldots, k)$$

и определим целые числа $r_2, r_3, \ldots, r_k$ неравенствами

$$\frac{r_i}{m} \le \rho_i < \frac{r_i + 1}{m} \quad (i = 2, 3, \ldots, k). \tag{4}$$

Тогда $$h^{-(r_i+1)/m} < |\chi_1 - \chi_i| \le h^{-r_i/m} \quad (i = 2, 3, \ldots, k). \tag{5}$$

В силу (3) $\rho_2 \ge \rho_3 \ge \ldots \ge \rho_k > 0$, а в силу (4) $r_i = [m\rho_i]$, $r_2 \ge r_3 \ge \ldots \ge r_k \ge 0$. Таким образом, с каждым корнем $\chi = \chi_1$ полинома P можно связать целочисленный вектор $r = (r_2, r_3, \ldots, r_k)$ с неотрицательными компонентами, при этом выполняются неравенства (5).

Доказательство первых трех лемм можно найти в [6].

Лемма 1. Пусть $P(x) \in Z[x]$. Тогда

$$|\omega - \chi_1| \le \min_{1 \le j \le n} \left(2^n \frac{P(\omega)}{P'(\omega)} |\chi_1 - \chi_2| \ldots |\chi_1 - \chi_j|\right)^{\frac{1}{j}},$$

где χ_1 – ближайший к ω корень полинома *P(x)*, а его корни упорядочены следующим образом: $|\chi_1 - \chi_2| \le |\chi_1 - \chi_3| \le \ldots \le |\chi_1 - \chi_j|$.

Лемма 2. Пусть $P(x)$ полином степени n, высоты H и его старший коэффициент равен a_n. Тогда $\left|\chi_{i_1}\cdots\chi_{i_m}\right| \le c(n)\frac{H}{|a_n|}$,

где $\chi_{i_1},\dots,\chi_{i_m}$ – попарно различные корни $P(x)$.

Лемма 3. Пусть $P(x)$ полином степени n, высоты H и его старший коэффициент равен a_n. Тогда существуют попарно различные корни $\chi_{i_1},\dots,\chi_{i_m}$, такие, что $\left|\chi_{i_1}\cdots\chi_{i_m}\right| \ge c(n)\frac{H}{|a_n|}$.

Лемма 4. Пусть $\sigma > 0$ – некоторое действительное число, s – натуральное, $H(\sigma,s)$ – достаточно большое действительное число. Пусть $P(x)$, $Q(x) \in Z(x)$ два взаимно простых многочлена, со старшим коэффициентом 1,

$$\max(H(P),H(Q)) = H^n, \quad \deg[P(x)] = s_1 \le s,\ \deg[Q(x)] = s_2 \le s.$$

Тогда, если для всех ω из некоторого интервала $I \subset (-s,s)$, $|I| = H^{-n}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства

$$\max\left(|P(\omega)|,|Q(\omega)|\right) < H^{-\tau},\ \tau > 0,$$

то $\tau+\mu+2\max(\tau+\mu-\eta,\ 0) < (2s-1)\mu+\sigma$.

Лемма 4 является обобщением леммы 2 из [2].

Доказательство теоремы:

Введем величину $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{c}$, $c = c(n)$ достаточно большая величина и положим

$$T = \left[\varepsilon_1^{-1}\right].\ \text{Пусть } \rho_j = \frac{r_{j+1}+\ldots+r_n}{T},\ 1 \le j \le n-1 \tag{6}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от величины $\frac{r_2}{T}+\rho_2$.

Предложение 1. Если $r_2T^{-1}+\rho_1 > n-2+2n\varepsilon_1$, то утверждение теоремы справедливо.

Доказательство: Ясно, что в теореме достаточно рассматривать только неприводимые полиномы, поскольку в случае приводимых полиномов от неравенства $|P_n(x)| < H^{-n+1-\varepsilon}$ при $P_n(x) = P_1(x)\cdot P_2(x)$ в силу почти мультипликативности высоты можно перейти к неравенству $|P_j(x)| < c(n)H(P_j(x))^{-n+1-\varepsilon}$. В класс $P(t)$ объединим полиномы $P_n(x)$ с условием $2^t \le H(P) < 2^{t+1}$. Разделим интервал I на подинтервалы J длины $|J| = 2^{-t\left(\frac{n-\rho_2}{2}\right)}$.

а). Вначале рассмотрим только те интервалы J_1, которым принадлежат не более одного полинома. Воспользуемся леммой 1 при j=2. Тогда

$$|x-\chi_1| < 2^{-t\left(\frac{n-\rho_2}{2}\right)-t\varepsilon_1}$$

Число интервалов J_1 не превосходит $2^{t\left(\frac{n-\rho_2}{2}\right)}|J|$, поэтому суммарная мера x, являющихся решением (2), в этом случае не превосходит $2^{-t\varepsilon_1}$. Ряд $\sum\limits_t 2^{-t\varepsilon_1}$ сходится, и необходимый результат следует теперь из известной леммы Бореля-Кантелли.

б). Остались такие интервалы J_1, каждому из которых принадлежит не менее двух различных полиномов $P(x)$. Для $x \in J_1$ разложим $P_k(x)$ в окрестности корня $\chi_{1k} = \chi_1(P_k)$:

$$P_k(x)=P'(\chi_{1k})(x-\chi_{1k})+\frac{1}{2}P''(\chi_{1k})(x-\chi_{1k})^2+\ldots+\frac{1}{n!}P^{(n)}(\chi_{1k})(x-\chi_{1k})^n.$$

Так как $\rho_1 = r_2T^{-1}+\rho_2$, то

$$\left|P_k'\left(\chi_{1k}\right)\right|\left|x-\chi_{1k}\right| < c(n)H\left(P_k\right)^{1-\rho_1}2^{-t\left(\frac{n-\rho_2}{2}\right)} < c(n)2^{t-nt},$$

$$\left|P_k''\left(\chi_{1k}\right)\right|\left(x-\chi_{1k}\right)^2 < c(n)H\left(P_k\right)^{1-\rho_2}2^{\rho_2 t-nt-t} < c(n)2^{t-nt},$$

$$\left|P_k^{j}\left(\chi_{1k}\right)\right|\left(x-\chi_{1k}\right)^j < c(n)H\left(P_k\right)^{1-\rho_j}2^{\rho_2 t\frac{j}{2}-nt\frac{j}{2}-t\frac{j}{2}} < c(n)2^{t-nt}$$

и

$$\left|P_k(x)\right| < c(n)\,2^{t-nt}. \qquad (7)$$

Применим к двум неприводимым полиномам с условием (7) *лемму 4*. Получим противоречие.

Предложение 2.

Если

$$1-\varepsilon/2 \le r_2T^{-1}+\rho_1 \le n-2+2n\varepsilon, \qquad (8)$$

то теорема верна.

Опять разделим J на интервалы J_1 длины $|J_1| = 2^{-t\sigma_1}$, где $\sigma_1 = n+1-\rho_1$, и возьмем $\varepsilon = 2^{-nt}$.

Рассмотрим вначале только такие интервалы J_1, которым принадлежит не более одного полинома $P(x)$.

Воспользуемся неравенством $|x-\chi_1| \le 2^{n-1}|P(x)||P'(\chi_1)|^{-1}$.

Получим

$$|x-\chi_1| \le 2^{\rho_1 t-nt-t}. \qquad (9)$$

Просуммировав оценки (9) по всем интервалам J_1, получим

$$\mu B_{n,I}(2^{-tn},2^t) < 2^{-t\varepsilon_1}|I|$$

Рассмотрим оставшиеся интервалы. Каждому из них принадлежит не менее двух полиномов $P_1(x), P_2(x)$. Разложим их на J_1 в ряд Тейлора, каждый в окрестности своего корня $\chi_{1j} = \chi_1(P_j), j = 1, 2$:

$$P_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \rho^{(k)}(\chi_{1j})(x-\chi_{1j})^k.$$

Из оценок

$$\left|P_j'\left(\chi_{1j}\right)\right|\left|x-\chi_{1j}\right| < 2^{-nt},$$

$$\left|P_j''\left(\chi_{1j}\right)\right|\left(x-\chi_{1j}\right)^2 < 2^{-nt}$$

и

$$\left|P_j^{(k)}\left(\chi_{1j}\right)\right|\left|x-\chi_{1j}\right|^k < 2^{t(1-\rho_3-3n-3+3\rho_1)} < 2^{-nt}$$

получаем $|P(x)| < 2^{-nt}$.

Применив лемму 4, вновь получим противоречие.

Предложение 3.

Если $\qquad r_2 T^{-1} + \rho_1 < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$,

то выполняется неравенство

$$\mu B_{n,I}(\varepsilon, 2^t) < 2^{-\frac{3t}{8}}.$$

Предложение 3 доказывается переходом к многочленам первой и второй степени, для которых теорема легко доказывается непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Beresnevich, V.V.*** // Acta Arithmetica. – 1999. – V. 90. – № 2. Pp. 97-112.
2. ***Берник, В.И.*** // Acta Arithmetica. – 1989. – V. 53. – № 1. – Pp. 17-28.

3. ***Ковалевская, Э.И., Сакович, Н.В.*** Применение метрической теории диофантовых приближений в поле комплексных чисел к задачам математической физики // Межд. матем. конференция: тез.докл. Академии наук РБ, БГУ, МГПИ Минск, 1993. – Ч. 1. – С. 16.
4. ***Mahler, K.*** Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. – 1932. – Bd. 106. – S. 131-139.
5. ***Спринджук, В.Г.*** О гипотезе Малера / В.Г. Спринджук // Докл. Акад. Наук СССР. 1964. – Т. 154. – № 4. – С. 783-786.
6. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Мн.: Наука и техника, 1967.
7. ***Шамукова, Н.В.*** Об аппроксимации нуля моническими многочленами третьей степени / Н.В. Шамукова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 4(22).

Поступила в редакцию 29.09.2005 г.