УДК 511.36

В.Н. БОРБАТ

О СОВМЕСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ C^2

Произведена новая арифметико-топологическая классификация множеств из пространства C^2, в которых модули целочисленных многочленов аппроксимируют нуль с заданным порядком, на классы трех типов в зависимости от величины, характеризующей производную многочлена. Исследованы метрические характеристики этих множеств. Доказано, что система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H), \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H), \end{cases}$$

где $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *– многочлен с целыми коэффициентами,* H *– высота* $P(x)$*, функция* $\Psi(x)$ *монотонно убывает при* $x > 0$ *и ряд* $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ *сходится,* $w_1 + w_2 = \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$, $v_1 + v_2 = \frac{1}{2}$, *имеет для почти всех* $(\omega_1, \omega_2) \in C^2$ *(в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в многочленах* $P(x) \in Z[x]$. *Тем самым получено подтверждение комплексного аналога гипотезы В.Г. Спринджука о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в пространстве* C^2 *для классов первого типа.*

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами, H – высота $P(x)$, функция $\Psi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$ и ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ сходится. В [1] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в пространстве R^2.

Теорема 1. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H), \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H), \end{cases} \qquad (1)$$

где $w_1 + w_2 = n-2$, $v_1 + v_2 = 1$, имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in R^2$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

В указанной работе также производится классификация целочисленных многочленов на классы трех типов, в зависимости от величины, характеризующей их производную. В настоящей работе доказывается комплексный аналог теоремы 1 для классов первого типа.

Теорема 2. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H), \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H), \end{cases} \tag{2}$$

где $w_1 + w_2 = \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$, $v_1 + v_2 = \frac{1}{2}$, имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in C^2$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Введем некоторые обозначения и приведем несколько лемм, необходимых для дальнейших рассуждений. Через $c(n)$ будем обозначать положительные функции, зависящие только от n. Над $c(n)$ будем производить действия по формальным правилам $c(n) + c(n) = c(n)$, $c(n) \cdot c(n) = c(n)$, смысл которых состоит в том, что сумма и произведение таких функций есть функция, зависящая от n.

Поскольку в теореме речь идет о конечности или бесконечности числа решений системы неравенств (2), то будем считать, что $H > H_0$, где H_0 – достаточно большое натуральное число. Далее будем считать, что ω_1, ω_2 – трансцендентные числа, поскольку мера тех $(\omega_1, \omega_2) \in C^2$ у которых хотя бы одно из чисел ω_1, ω_2 алгебраическое, равна нулю.

Лемма 1. Пусть $G \subset C^2$ – некоторая ограниченная область и $B \subset G$ – измеримое множество в C^2, $\mu B > c(n)\mu G$, где μB и μG мера Лебега множеств B и G в C^2. Пусть далее для $(\omega_1, \omega_2) \in B$ верно неравенство $|P(\omega_1) \cdot P(\omega_2)| < H^{-w}$, где $P(x)$ – многочлен степени не выше n. Тогда для всех $(\omega_1, \omega_2) \in G$ верно неравенство $|P(\omega_1) \cdot P(\omega_2)| < c(n)H^{-w}$.

Лемма 1 представляет собой аналог леммы 10 из [3] и доказывается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

Обозначим через $P_n(H)$ класс неприводимых многочленов с условием $a_n(P) = H$. Пусть далее $P_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} P_n(H)$, $P(x) \in P_n(H)$ и $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ – корни многочлена $P(x)$. Будем считать, что корни $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ упорядочены таким образом, что $\mathrm{Re}\chi_1 \le \mathrm{Re}\chi_2 \le \dots \le \mathrm{Re}\chi_n$. В случае равенства $\mathrm{Re}\chi_l = \mathrm{Re}\chi_t$ ранее будем записывать тот корень, у которого меньше модуль мнимой части, а в случае равенства модулей мнимых частей ранее поставим тот корень, мнимая часть которого положительна. Выберем два любых корня χ_{11} и χ_{21} многочлена $P(x)$. Относительно каждого из них все остальные корни упорядочим следующим образом:

$$|\chi_{11} - \chi_{12}| \le |\chi_{11} - \chi_{13}| \le \dots \le |\chi_{11} - \chi_{1n}|,$$

$$|\chi_{21} - \chi_{22}| \le |\chi_{21} - \chi_{23}| \le \dots \le |\chi_{21} - \chi_{2n}|.$$

Введем обозначения:

$$|\chi_{11} - \chi_{1i}| = H^{-\mu_i},\ i = 2, \dots, n,\ |\chi_{21} - \chi_{2j}| = H^{-\theta_j},\ j = 2, \dots, n.$$

Зафиксируем ε. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot d^{-1}$, где $d = d(n)$ достаточно большая величина. Положим $T = [\varepsilon_1^{-1}]$. Определим целые числа l_i и s_j из неравенств:

$$\frac{l_i - 1}{T} \le \mu_i < \frac{l_i}{T}, \ i = 2, \ldots, n, \quad \frac{s_j - 1}{T} \le \theta_j < \frac{s_j}{T}, \ j = 2, \ldots, n.$$

С фиксированной парой корней (χ_{11}, χ_{21}) многочлена $P(x)$ будем связывать целочисленный вектор $\overline{s}_{1,2} = \overline{s} = (l_2, \ldots, l_n, s_2, \ldots, s_n)$. Все многочлены $P(x) \in P_n(H)$, имеющие один и тот же вектор $\overline{s}$, объединим в класс $P_n(H, \overline{s})$.

Пусть далее $p_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $q_j = \frac{s_{j+1} + \ldots + s_n}{T}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $S(\chi_{11}) = \{\omega_1 \in C : \min\limits_{1 \le l \le n} |\omega_1 - \chi_l| = |\omega_1 - \chi_{11}|\}$,

$S(\chi_{21}) = \{\omega_2 \in C : \min\limits_{1 \le s \le n} |\omega_2 - \chi_s| = |\omega_2 - \chi_{21}|\}$.

Лемма 2. Неравенство $| P(\omega) | < H^{-\frac{n}{2}+1-\delta}$ при любом $\delta > 0$ имеет для почти всех $\omega \in C$ лишь конечное число решений в приводимых целочисленных многочленах степени не выше n.

Лемма 2 доказана в [4].

Лемма 3. В системе неравенств (2) можно рассматривать лишь многочлены $P(x) \in P_n$.

Переход к многочленам, у которых старший коэффициент равен высоте, производится как в [2]. Переход к неприводимым многочленам производится с использованием леммы 3.

Лемма 4. Число классов $P_n(H, \overline{s})$ конечно и зависит только от n и ε.

Лемма 4 доказана в [5].

Лемма 5. Пусть $P(x) \in P_n(H)$, $\omega \in S(\chi_{11})$. Тогда

$$|\omega - \chi_{11}| \le 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_{11})|}, \tag{3}$$

$$|\omega - \chi_{11}| \le \min_{2 \le j \le n} \left(2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_{11})|} |\chi_{11} - \chi_{12}| \cdots |\chi_{11} - \chi_{1j}|\right)^{\frac{1}{j}}. \tag{4}$$

Лемма 6. Если $P(x) \in P_n(H, \overline{s})$. Тогда

$$| P^{(l)}(\chi_{11}) | < c(n) H^{1 - p_l + (n-l)\varepsilon_1}, \ l = 1, 2, \ldots n-1.$$

Леммы 5, 6 доказаны в [6].

Лемма 7. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ – взаимно простые целочисленные многочлены степени не выше n и $\max(H(P),\ H(Q)) \le H$. Тогда если для $(\omega_1,\ \omega_2)$ из области $I = K_1 \times K_2$, где $K_1 = C(z_0,\ H^{-\eta_1})$, $K_2 = C\ (z_1,\ H^{-\eta_2})$, $\operatorname{Im} z_1 \ne 0$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $K_1, K_2 \subset C\ (0,\ n)$ выполняются неравенства

$$\max(|P(\omega_1)|, |Q(\omega_1)|) < H^{-\tau_1},\ \max(|P(\omega_2)|, |Q(\omega_2)|) < H^{-\tau_2},$$

где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, то для каждого $\delta > 0$ существует достаточно большое вещественное число $H_0 = H_0(\delta, n, \eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2)$, что при $H \ge H_0$

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2(\max(\tau_1 + 1 - \eta_1,\ 0) + \max(\tau_2 + 1 - \eta_2,\ 0)) \le 2n + \delta.$$

Доказательство леммы 7 незначительно отличается от доказательства леммы из [7].

Так же, как и в [1] объединим многочлены $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$ в классы первого типа, если выполнены неравенства

$$l_2 T^{-1} + p_1 \le w_1 + v_1 + \frac{1}{2},\ s_2 T^{-1} + q_1 \le w_2 + v_2 + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы разобьем на четыре случая.

Обозначим через $L(\ w_1,\ w_2,\ v_1,\ v_2\ )$ – множество тех $(\omega_1\ ,\ \omega_2) \in C^2$, для которых система неравенств (2) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Предложение 1. Если выполнены неравенства (5) и

$$\frac{n}{2} + 4n\varepsilon_1 < l_2 T^{-1} + p_1 + s_2 T^{-1} + q_1, \tag{6}$$

то мера множества $L(\ w_1,\ w_2,\ v_1,\ v_2\ )$ равна нулю.

Доказательство. Воспользуемся неравенством $\Psi(H) < H^{-1}$.
Тогда (2) примет вид

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1 - v_1}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2 - v_2}. \end{cases} \tag{7}$$

Определим $P_t(\bar{s}) = \bigcup\limits_{2^t \le H < 2^{t+1}} P_n(H, \bar{s})$. Так как $|\ \chi_i\ | \le 2$, то из (4) получаем при $j = n$, что все $(\omega_1\ ,\ \omega_2) \in C^2$, для которых выполняется система неравенств (7), находятся внутри области Ω^2,

где $\Omega = \{\omega \in C : |\ \omega\ | \le 3,\ |\operatorname{Im} \omega| > \frac{\delta}{12}\}$. Покроем область Ω^2 областями

$\Pi = K_1 \times K_2$, где K_1 и K_2 – круги радиусов $H^{-\eta_1}$ и $H^{-\eta_2}$,

$\eta_1 = w_1 + v_1 + 1 - p_1 - 0{,}5\varepsilon_1$, $\eta_2 = w_2 + v_2 + 1 - q_1 - 0{,}5\varepsilon_1$.

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит области Π, если существует $(\omega_1, \omega_2) \in \Pi$, что $|P(\omega_1)| < H^{-w_1 - v_1}$, $|P(\omega_2)| < H^{-w_2 - v_2}$.

Пусть каждой области Π принадлежит не более одного многочлена $P(x) \in P_t(\bar{s})$. Тогда из (4) получаем, что мера $\omega_1 \in S(\chi_{11})$, для которых выполняется первое неравенство системы (7) не превосходит $c(n)2^{-t(w_1 + v_1 + 1 - p_1)}$, а мера $\omega_2 \in S(\chi_{21})$, для которых выполняется второе неравенство системы (7), не превосходит $c(n)2^{-t(w_2 + v_2 + 1 - q_1)}$. Поэтому мера тех (ω_1, ω_2), $\omega_1 \in S(\chi_{11})$, $\omega_2 \in S(\chi_{21})$, для которых выполняется система неравенств (7), не превосходит $c(n)2^{2t(-\frac{n}{2} - 1 + p_1 + q_1)}$. Число многочленов не превосходит количество областей Π. Следовательно, мера тех (ω_1, ω_2), для которых выполняется система (7) хотя бы для одного многочлена $P(x) \in P_t(\bar{s})$, оценивается сверху величиной

$$c(n)2^{2t(-\frac{n}{2} - 1 + p_1 + q_1)} \times 2^{2t(w_1 + v_1 + w_2 + v_2 + 2 - \varepsilon_1 - p_1 - q_1)} < c(n)2^{-t\varepsilon_1}.$$

Так как ряд $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t\varepsilon_1}$ сходится, то доказательство предложения 1 в этом случае следует из леммы Бореля-Кантелли.

Теперь предположим, что существуют такие области Π, которым принадлежат два и более многочленов $P(z) \in P_t(\bar{s})$. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ принадлежат области Π, тогда существуют такие точки $(\omega_{11}, \omega_{21})$, $(\omega_{12}, \omega_{22})$ принадлежащие Π, что

$$\max\left(|P(\omega_{11})|, |Q(\omega_{12})|\right) < H^{-w_1 - v_1}, \tag{8}$$

$$\max\left(|P(\omega_{21})|, |Q(\omega_{22})|\right) < H^{-w_2 - v_2}. \tag{9}$$

Пусть $\chi_{11}(P), \chi_{21}(P), \chi_{11}(Q), \chi_{21}(Q)$ – ближайшие к ω_{11}, ω_{21}, ω_{12}, ω_{22} корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Из (4), (8), (9) получаем:

$$\max(|\omega_{11} - \chi_{11}(P)|, |\omega_{12} - \chi_{11}(Q)|) < c(n)H^{-w_1 - v_1 - 1 + p_1},$$

$$\max(|\omega_{21} - \chi_{21}(P)|, |\omega_{22} - \chi_{21}(Q)|) < c(n)H^{-w_2 - v_2 - 1 + q_1}.$$

Поэтому

$$|\chi_{11}(P) - \chi_{11}(Q)| \le |\chi_{11}(P) - \omega_{11}| + |\omega_{11} - \omega_{12}| + + |\omega_{12} - \chi_{11}(Q)| < c(n)H^{-\eta_1}, \tag{10}$$

$$|\chi_{21}(P) - \chi_{21}(Q)| < c(n)H^{-\eta_2}. \tag{11}$$

Оценим разность $|\chi_{11}(P) - \chi_{1i}(Q)|$, $i = 2, \ldots, n$, учитывая, что из (5) следует $l_2T^{-1} - \varepsilon_1 < \eta_1$:

$$|\chi_{11}(P) - \chi_{1i}(Q)| \le |\chi_{11}(P) - \chi_{11}(Q)| + |\chi_{11}(Q) - \chi_{1i}(Q)| < < c(n)(H^{-\eta_1} + H^{-l_iT^{-1} + \varepsilon_1}) < c(n)H^{-l_iT^{-1} + \varepsilon_1}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем

$$\prod_{i=1}^{n} |\chi_{11}(P) - \chi_{1i}(Q)| < c(n)H^{-\eta_1 - p_1 + (n-1)\varepsilon_1}. \tag{13}$$

Аналогично получаем:

$$|\chi_{21}(P) - \chi_{2i}(Q)| < c(n)H^{s_iT^{-1} + \varepsilon_1}, \quad i = 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\prod_{i=1}^{n} |\chi_{21}(P) - \chi_{2i}(Q)| < c(n)H^{-\eta_2 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1}. \tag{15}$$

Аналогично оценим $\prod_{i=1}^{n} |\chi_{21}(P) - \chi_{2i}(Q)| < c(n)H^{-\eta_2 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1}$,

$$\prod_{i=1}^{n} |\chi_{12}(P) - \chi_{1i}(Q)| < c(n)H^{-l_2T^{-1} - p_1 + n\varepsilon_1}, \tag{16}$$

$$\prod_{i=1}^{n} |\chi_{22}(P) - \chi_{2i}(Q)| < c(n)H^{-s_2T^{-1} - q_1 + n\varepsilon_1}. \tag{17}$$

Поскольку многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ из $P_t(\bar{s})$ не имеют общих корней и модуль их результанта $|R(P,Q)| \geq 1$, из (13), (15)-(17) имеем

$$1 \leq |R(P,Q)| < c(n)2^{t(2n-2\eta_1-4p_1-2\eta_2-4q_1-}$$

$$^{-2l_2T^{-1}-2s_2T^{-1}+8(n-4)\varepsilon_1} < c(n)2^{-t\varepsilon_1}.$$

Полученное неравенство при больших t противоречиво, что показывает, что области Π, которым принадлежит более одного многочлена, не существует.

Предложение 2. Если выполнены неравенства (5) и

$$\tfrac{3}{2} - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq l_2T^{-1} + p_1 + s_2T^{-1} + q_1 \leq \tfrac{n}{2} + 4n\varepsilon_1, \quad (18)$$

то мера множества $Z(\omega_1, \omega_2, v_1, v_2)$ равна нулю.

Доказательство. От системы неравенств (2) снова перейдем к системе неравенств (7). Положим

$$k = n + 1 - (2l_2T^{-1} + 2p_1 + 2s_2T^{-1} + 2q_1). \quad (19)$$

Предположим, что

$$\{k\} > \varepsilon. \quad (20)$$

Тогда из (18)-(20) получаем $n - [k] \geq 3$. Учитывая (5) и (18), можно считать, что выполняется, по крайней мере, одно из двух неравенств:

$$l_2T^{-1} + p_1 \leq w_1 + v_1 + 1 - 2(n+1)\varepsilon_1, \quad (21)$$

$$s_2T^{-1} + q_1 \leq w_2 + v_2 + 1 - 2(n+1)\varepsilon_1. \quad (22)$$

Покроем область Ω^2 областями $K = I_1 \times I_2$, где I_1 – круг радиуса $H^{-\sigma_1}$, I_2 – круг радиуса $H^{-\sigma_2}$. Если (21) выполняется, а (22) – нет, положим $\sigma_1 = l_2T^{-1} + 2(n+1)$, $\sigma_2 = s_2T^{-1}$, если наоборот, то положим $\sigma_1 = l_2T^{-1}$, $\sigma_2 = s_2T^{-1} + 2(n+1)$. В случае выполнения обоих неравенств (21) и (22) положим $\sigma_1 = l_2T^{-1} + (n+1)$, $\sigma_2 = s_2T^{-1} + (n+1)$.

Пусть, например, выполняются оба неравенства (21), (22). Другие случаи рассматриваются аналогично. Обозначим через $N(\Pi)$ число многочленов, принадлежащих H. Если $N(\Pi) < c(n)H^{v}$, $v = k - 1 - 0{,}1\varepsilon$, то суммарная мера тех $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$, для которых хотя бы при одном $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$ выполняется система неравенств (7), оценивается сверху величиной

$$c(n)\, H^{-w_1-v_1-1-w_2-v_2-1+q_1} \times H^{l_2T^{-1}+s_2T^{-1}+2(n+1)\varepsilon_1} \times$$

$$\times H^{k-1-0{,}1\varepsilon_1} < c(n)H^{-1-\varepsilon_1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{-1-\varepsilon_1}$ сходится, то для окончания доказательства предложения 2 в этом случае достаточно применить лемму Бореля-Кантелли.

Предположим сейчас, что существуют такие области Π, что $N(\Pi) > c(n)H^{[k]-1}H^{\{k\}-0{,}1\varepsilon}$. Зафиксируем одну из таких областей Π и занумеруем $P_1(x), \dots, P_{m_\Pi}(x)$, принадлежащие Π. Два таких многочлена

$$P_i(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(i)}x^{n-1} + \dots + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)},$$

$$P_j(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(j)}x^{n-1} + \dots + a_1^{(j)}x + a_0^{(j)},$$

где $1 \le i < j \le m_\Pi$,

объединим в один класс, если $a_{n-1}^{(i)} = a_{n-1}^{(j)}, \dots, a_{n-[k]+1}^{(i)} = a_{n-[k]+1}^{(j)}$. Применим принцип ящиков Дирихле. Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]-1}$, то среди $c(n)H^{\nu}$ многочленов существует не менее $c(n)H^{\{k\}-0{,}1\varepsilon}$, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем эти многочлены $P_0(x), \dots, P_{l_\Pi}(x)$, $l_\Pi = c(n)H^{\{k\}-0{,}1\varepsilon}$ и образуем новые многочлены $t_i(x) = P_i(x) - P_0(x)$, $i = 1, \dots, l_\Pi$. Все многочлены $t_i(x)$ различны, имеют степень не выше $n - [k]$ и высоту не более $2H$. Разложим любой многочлен $P(x)$, принадлежащий Π, в ряд Тейлора в окрестности корня $\chi_{11}(P)$

$$P(\omega_1) = P'(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11}) + \frac{1}{2!}P''(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^2 + \\ + \dots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^n. \qquad (23)$$

Так как $P(x)$ принадлежит Π, то существует такая точка $(\omega_{01}, \omega_{02}) \in \Pi$, что $|P(\omega_{01})| < H^{-w_1-v_1}$, $|P(\omega_{02})| < H^{-w_2-v_2}$. Из (4) получаем

$$|\omega_{01} - \chi_{11}| < c(n)H^{-w_1-v_1-1+p_1}.$$

Тогда если $(\omega_1, \omega_2) \in \Pi$, то $|\omega_1 - \omega_{01}| < H^{-\sigma_1}$. Следовательно, имеем

$$|\omega_1 - \chi_{11}| < c(n)H^{l_2 T^{-1} - (n+1)\varepsilon_1}. \tag{24}$$

Используя лемму 6 и (24), получим:

$$|P'(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}, \tag{25}$$

$$\left|P^{(i)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^i\right| < c(n)H^{1 - il_2 T^{-1} - i(n+1)\varepsilon_1} \times H^{1 - p_i + (n-i)\varepsilon_1} <$$

$$< c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1},$$

где $i = 2, \ldots, n-1,$ (26)

$$\left|P^{(n)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^n\right| < c(n)H^{1 - nl_2 T^{-1} - n(n+1)\varepsilon_1} <$$

$$< c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \tag{27}$$

Из (23), (25)-(27) следует

$$|P(\omega_1)| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \tag{28}$$

Разлагая многочлен $P(x)$, принадлежащий H, в ряд Тейлора в окрестности корня $\chi_{21}(P)$, аналогично получим

$$|P(\omega_2)| < c(n)H^{1 - q_1 - s_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \tag{29}$$

Поскольку неравенства (28) и (29) выполняются для любого $P(x) \in P_n(H, \overline{s})$, принадлежащего Π, то для любого многочлена $t_i(x)$, $1 \le i \le l_\Pi$, выполняются неравенства

$$|t_i(\omega_1)| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1},$$

(30)

$$|t_i(\omega_2)| < c(n)H^{1 - q_1 - s_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}.$$

Рассмотрим три возникающие возможности.

а) Все $t_i(x) = a_i t(x)$, $a_i \in Z$. Тогда среди многочленов $t_i(x)$ существует многочлен $R(x)$, высота которого не превосходит $c(n)H^{1-\{k\}+0{,}1\varepsilon}$. Из (30) получаем:

$$|R(\omega_1)| < c(n)H(R)^{\frac{1-p_1-l_2T^{-1}-2\varepsilon_1}{1-\{k\}+0{,}1\varepsilon}},$$

$$|R(\omega_2)| < c(n)H(R)^{\frac{1-q_1-s_2T^{-1}-2\varepsilon_1}{1-\{k\}+0{,}1\varepsilon}}.$$

Так как при выполнении (20)

$$\frac{p_1 + l_2T^{-1} + q_1 + s_2T^{-1} - 2 + 4\varepsilon_1}{1 - \{k\} + 0{,}1\varepsilon} > \frac{n-[k]}{2} - \frac{1}{2},$$

то для окончания доказательства в этом случае достаточно применить метрическую теорему из [2].

б) Среди $t_i(x)$ имеются приводимые. Применим лемму 2, поскольку

$$p_1 + l_2T^{-1} + q_1 + s_2T^{-1} - 2 + 4.$$

в) Среди многочленов $t_i(x)$ имеются хотя бы два без общих корней. Тогда применим лемму 7. Здесь при условии (20) можно считать

$$\tau_1 = p_1 + l_2T^{-1} - 1 + 2\varepsilon_1, \quad \tau_2 = q_1 + s_2T^{-1} - 1 + 2\varepsilon_1,$$

$$\eta_1 = l_2T^{-1} + (n+1)\varepsilon_1, \quad \eta_2 = s_2T^{-1} + (n+1)\varepsilon_1.$$

Получаем

$$p_1 + q_1 - (4n-8)\varepsilon_1 \le -2 + 2\{k\} + l_2T^{-1} + s_2T^{-1} + \delta. \quad (31)$$

Поскольку $p_1 \ge l_2T^{-1}$, $q_1 \ge s_2T^{-1}$, то при $\delta < 2 - 2\{k\} - (4n-8)\varepsilon_1$ неравенство (31) противоречиво.

Случай $0 \le \{k\} \le \varepsilon$ требует некоторых изменений, связанных с выбором параметров.

Предложение 3. Если выполнены неравенства (5) и

$$\varepsilon < l_2T^{-1} + p_1 + s_2T^{-1} + q_1 < 3 - 0{,}5\varepsilon, \quad (32)$$

то мера множества $L(w_1, w_2, v_1, v_2)$ равна нулю.

Доказательство. Многочлены $P(x) = Hx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ из множества $P_n(H, \bar{s})$ объединим в один класс $P_n(H, \bar{s}, \bar{c})$, если они имеют один и тот же вектор $\overline{c} = (a_{n-1}, \dots, a_3)$. Пусть $\sigma_1(P)$ – множество комплексных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\omega_1 - \chi_{11}\right| < 2^n H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H)\left|P'(\chi_{11})\right|^{-1},$$

$\sigma_2(P)$ – множество комплексных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\omega_2 - \chi_{21}\right| < 2^n H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H)\left|P'(\chi_{21})\right|^{-1},$$

$\tau_1(P)$ – множество комплексных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\omega_1 - \chi_{11}\right| < 2^n H^{-\alpha_1}\left|P'(\chi_{11})\right|^{-1},$$

$\tau_2(P)$ – множество комплексных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\omega_2 - \chi_{21}\right| < 2^n H^{-\alpha_2}\left|P'(\chi_{21})\right|^{-1},$$

где α_1, α_2 выбраны следующим образом:

$$l_2T^{-1} + p_1 < 1 + \alpha_1 - 0{,}2\varepsilon, \quad s_2T^{-1} + q_1 < 1 + \alpha_2 - 0{,}2\varepsilon,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \le w_1 + v_1, \quad \alpha_2 \le w_2 + v_2.$$

Ясно, что $\sigma_1(P) \subset \tau_1(P)$, $\sigma_2(P) \subset \tau_2(P)$. Из (4) получаем, что все $\omega_1 \in S(\chi_{11})$, $\omega_2 \in S(\chi_{21})$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|P(\omega_1)\right| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H), \left|P(\omega_2)\right| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H),$$

$$\left|P(\omega_1)\right| < H^{-\alpha_1}, \left|P(\omega_2)\right| < H^{-\alpha_2},$$

принадлежат множествам $\sigma_1(P)$, $\sigma_2(P)$, $\tau_1(P)$, $\tau_2(P)$ соответственно. Пусть $(\omega_1, \omega_2) \in \tau_1(P) \times \tau_2(P)$. Тогда имеем:

$$\left|P'(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})\right| < 2^n H^{-\alpha_1}, \tag{33}$$

$$\left|P^{(i)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^i\right| < c(n)H^{1 - p_i + (n-i)\varepsilon_1} \times$$
$$\times H^{-i\alpha_1 - i + ip_1} < c(n)H^{-\alpha_1}, \; i = 2, \dots, n-1, \tag{34}$$

$$\left|P^{(n)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^n\right| < c(n)H^{1 - n\alpha_1 - n + np_1} < c(n)H^{-\alpha_1}. \tag{35}$$

Из неравенств (33)-(35), используя разложение (23) многочлена $P(x)$, получаем при $\omega_1 \in \tau_1(P)$, что $|P(\omega_1)| < c(n)H^{-\alpha_1}$. Для $\omega_2 \in \tau_2(P)$ аналогично получим $|P(\omega_2)| < c(n)H^{-\alpha_2}$. Область $\Delta(P) = \tau_1(P) \times \tau_2(P)$ назовем несущественной, если в классе $P_n(H, \bar{s}, \bar{c})$ найдется такой многочлен $Q(x)$, что $\mu(\Delta(P) \cap \Delta(Q)) \geq \frac{1}{2}\mu\,\Delta(P)$. В противном случае область $\Delta(P)$ будем называть существенной. Если область $\Delta(P)$ существенна, то каждая точка $(\omega_1, \omega_2) \in \Pi$ принадлежит не более чем восьми существенным областям и поэтому $\sum\limits_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{c})} \mu\,\Delta(P) < const$. Из неравенства $\mu\,(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)) < \mu\,\Delta\cdot H^{-n+3}\Psi(H)$ получаем

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{c})} \mu\,(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)) < c(n)H^{-n+3}\Psi(H),$$

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s})} \mu\,(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)) < c(n)\Psi(H).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ сходится, то по лемме Бореля-Кантелли множество (ω_1, ω_2), попадающих в бесконечное число существенных областей $\Delta(P)$, имеет нуль.

Если область $\Delta(P)$ несущественна, то $|\tau_1(P)\cap\tau_1(Q)| \geq \frac{1}{2}|\tau_1(P)|$, $|\tau_2(P)\cap\tau_2(Q)| \geq \frac{1}{2}|\tau_2(P)|$, и на интервалах

$$J_1 = \tau_1(P)\cap\tau_1(Q) \text{ и } J_2 = \tau_2(P) \cap \tau_2(Q)$$

многочлен $R(x) = P(x) - Q(x)$ удовлетворяет условиям

$$|R(\omega_1)| < c(n)H^{-\alpha_1},\ |R(\omega_2)| < c(n)H^{-\alpha_2},\ \deg R \leq 2. \quad (36)$$

Высота многочлена $R(x)$ удовлетворяет неравенствам:

$$H(R) < c(n)\left| P'(\chi_{11}) \right|, \; H(R) < c(n)\left| P'(\chi_{21}) \right|. \qquad (37)$$

Из (32), (36), (37) получаем для $(\omega_1, \omega_2) \in J_1 \times J_2$

$$\left| R(\omega_1)R(\omega_2) \right| < c(n)H^{-\frac{1}{1-\varepsilon}} < c(n)H^{-1-\varepsilon}.$$

Далее, используя лемму 1 и метрическую теорему из [2], заключаем, что множество (ω_1, ω_2), попадающих в бесконечное число несущественных областей $\Delta(P)$, имеет меру нуль.

Предложение 4. Если выполнены неравенства (5) и

$$l_2T^{-1} + p_1 + s_2T^{-1} + q_1 < \varepsilon,$$

то мера множества $L(w_1, w_2, v_1, v_2)$ равна нулю.

Доказательство. Многочлены $P(x) = Hx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ из множества $P_n(H, \bar{s})$ объединим в один класс $P_n(H, \bar{s}, \bar{d})$ если они имеют один и тот же вектор $\bar{d} = (a_{n-1}, \ldots, a_2)$. Определим $\sigma_1(P)$, $\sigma_2(P)$ как в предложении 3, а $\tau_1(P)$ как множество комплексных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству $\left| \omega_1 - \chi_{11} \right| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1}\left| P'(\chi_{21}) \right|^{-1}$, $\tau_2(P)$ как множество комплексных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \omega_2 - \chi_{21} \right| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1}\left| P'(\chi_{21}) \right|^{-1}.$$

Используя разложение (23) многочлена $P(x)$ в ряд Тейлора в окрестности корня χ_{11} и неравенство $\left| P^{(i)}(\omega_1) \right| < i!\,3^n(n+1)H$ для $\omega_1 \in C$, получим:

$$\left| P'(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11}) \right| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1},$$

$$\left| P^{(i)}(\chi_{11})(\omega_1 - \chi_{11})^i \right| < 3^n(n+1)H \times$$
$$\times 2^{-i(n+1)}(n+1)^{-i}H^{-i-\varepsilon i} < (n+1)^{-1}2^{-n-1},$$

где $i = 2, \ldots, n$, $\left| P(\omega_1) \right| < 2^{-n-1}$.

Аналогично, используя разложение многочлена $P(x)$ в ряд Тейлора в окрестности корня χ_{21} и неравенство $\left|P^{(i)}(\omega_2)\right| < i!3^n(n+1)H$ для $\omega_2 \in C$, получим $\left|P(\omega_2)\right| < 2^{-n-1}$. Если область $\Delta(P)$ существенна, то из неравенства $\mu\,(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)) \le c(n)\mu\,\Delta(P)H^{-n+2}\Psi(H)$ получим

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s})} \mu\,(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)) <$$

$$< c(n)\sum_{\bar{d}}\ \sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{d})} \mu\,\Delta(P)H^{-n+2}\Psi(H) < c(n)\Psi(H).$$

Снова применим лемму Бореля-Кантели.

Если область $\Delta(P)$ несущественна, то для многочлена $R(x) = P(x) - Q(x)$ имеем $\left|R(\omega_1)\right| < 2^{-n}$, $\left|R(\omega_2)\right| < 2^{-n}$, $\deg R(x) \le 1$. Откуда заключаем, что мера указанных $(\omega_1,\ \omega_2)$ не превосходит любого наперед заданного положительного числа. По лемме 1, множество $(\omega_1,\ \omega_2)$, попадающих в бесконечное число несущественных областей, имеет меру нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Берник, В.И.*** Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов / В.И. Берник, В.Н. Борбат // Аналитическая теория чисел и ее приложения. Сборник статей к 60-летию со дня рожд. проф. А.А. Карацубы / Труды математического института им. В.А. Стеклова. – Москва: МАИК "Наука", 1997. – С. 58-73.
2. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук // Наука и техника. – Мн., 1967. – 194 с.
3. ***Берник, В.И.*** Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Т. 4. – С. 219-253.
4. ***Борбат, В.Н.*** Многочлены с малой производной в корне и диофантовы приближения в поле комплексных чисел / В.Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1996. – № 2. – С. 5-10.
5. ***Желудевич, Ф.Ф.*** Совместные диофантовы приближения независимых величин в различных метриках / Ф.Ф. Желудевич // Acta Arithmetica. – 1986. – Т. 46. – С. 285-296.
6. ***Берник, В.И.*** Метрическая теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 24-45.
7. ***Берник, В.И., Желудевич, Ф.Ф.*** Необходимое условие взаимной простоты целочисленных многочленов, принимающих малые значения в некотором круге / В.И. Берник, Ф.Ф. Желудович. – Минск, 1983. – 12 с. – (Препринт / Ин-т математики АН БССР).

Поступила в редакцию 24.10.2005 г.