УДК 378.016:57+57.08:51

Н.В. КЕПЧИК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В БИОЛОГИИ В КОНТЕКСТЕ УНИВЕРСИТЕТСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Статья посвящена методическим проблемам преподавания математики на биологическом факультете. Проанализировано, какие математические навыки необходимы студентам-биологам для решения реальных математических моделей с биологическим содержанием, и какие трудности возникают на пути преподавателя математики при обучении учащихся биологического факультета.

В частности, в статье говорится о том, что при изучении курса "Высшая математика" на биологическом факультете должен использоваться принцип профессиональной (биологической) направленности, то есть наряду с изучением общих методов должны рассматриваться и более частные специальные методы, непосредственно связанные с реальными биологическими объектами. Более того, так как сегодня математическое моделирование в биологии, химии и физике развивается весьма бурно и для этих областей науки математическое моделирование играет синтезирующую роль, то большое внимание необходимо уделять методам моделирования не только биологических процессов, но также моделям, учитывающим междисциплинарные связи курсов биологии, физики и химии.

Хорошо известно, что математические дисциплины закладывают естественнонаучные обоснования специальных физических, химических, биологических и др. проблем, однако, в разное время роль математики в различных областях естествознания была неодинаковой. Например, использование математики в биологии началось значительно позже, чем в физике и химии, и достаточно большое число качественных предсказаний (положения о естественном отборе и борьбе за существование Дарвина, основные положения формальной генетики и др.) были сделаны без математики. Но, несмотря на то, что биология очень долго развивалась на основе только качественного анализа явлений, уже в конце XVII – начале XVIII века предпринимались попытки использовать математику в биологии. Так, Д.А. Борелли (1608 – 1679) делал математические расчеты движения животных, Р.А. Ремюр (1683 – 1757) пытался найти математические законы строения ячеек пчелиных сот.

Осознанная необходимость количественного анализа явлений жизни с использованием ряда математических методов появилась только в XIX веке. Первым, кому удалось соединить методы антропометрии и социальной статистики с математической теорией вероятностей, был А. Кетле (1796 – 1874), который в книге "О человеке и развитии его способностей, или Опыт социальной физики" (1869) доказал, что различные физические особенности и поведение человека подчиняются закону распределения вероятностей. В более поздних работах А. Кетле показал, что случайности, наблюдаемые в живой природе вследствие их повторяемости, обнаруживают внутреннюю тенденцию, следуя определенной закономерности, которую можно исследовать и описать точными математическими методами. Однако основоположником биометрии все же считают Ф. Гальтона (1822 – 1911), который впервые применил статистический метод А. Кетле к решению проблемы наследственности и изменчивости организмов, разработал методику регрессионного и корреляционного анализа и создал школу биометриков.

В конце XIX – начале XX века биология стала на путь превращения из науки описательной в науку точную, основанную на применении математических методов в исследовательской работе. Именно в это время появились работы К. Пирсона (1857 – 1936), который стал продолжателем идей и методов Ф. Гальтона и развил математический аппарат биометрии; работы Р. Фишера (1890 – 1962), который разработал метод, известный нам под названием – дисперсионный анализ; монографии В. Вольтерра (1860 – 1940), который с помощью дифференциальных и интегральных уравнений объяснял совместное существование нескольких биологических видов, один из которых является хищниками по отношению к другим; и многих других ученых, которые внесли огромный вклад в развитие математических и математико-статистических методов в биологии.

В настоящее время роль математических методов в биологии возрастает, поскольку:

- любое биологическое утверждение (в силу тесного переплетения биологии, физики и химии) нуждается в сопоставлении с законами физики и химии, а для этого необходимо использовать математический аппарат;
- количество новой экспериментальной информации таково, что систематизировать его без математического аппарата невозможно;
- применение современной математики к положениям и законам биологии, которые были сформулированы без применения математики, позволяет придать им более четкую и содержательную форму, а также выявить новые ранее неизвестные аспекты.

Неправильная оценка значения математики в научном прогрессе, оценка ее места в науке и ее роли при решении конкретных задач, стоящих перед обществом в данный момент времени, связаны с неправильным представлением о сущности математических знаний, математических моделей и методов. Поэтому с повышением роли математических методов при решении конкретных биологических задач и в связи с изменением подходов к проблеме подготовки специалистов высшей квалификации возникает вопрос о том, чему и как учить биологов в математике.

Трудности при обучении математике возникают уже при отборе материала, который должен быть рассмотрен на занятиях. Также дело усложняется из-за широкого применения математики в различных областях науки и техники, так как часто специалисты-нематематики убеждены, что они отлично знают, как и чему надо учить в математике. При этом каждый, как правило, исходит из своих математических знаний и считает, что надо знать именно то, что знает он, и понимать так, как понимает он.

Математика как предмет преподавания зависит от времени. Однако, несмотря на то, что во все времена она имела бесспорное культурное и практическое значение, приходится констатировать, что "культурная составляющая" математического образования будущих специалистов гуманитарного и естественнонаучного профиля все еще остается размытой, поскольку не существует четкой концепции математики для гуманитариев и математики для естественников как предмета преподавания.

Так многие считают, что математическое образование для биологов должно сводиться только к изучению биологической статистики (биометрии), в частности, к изучению математических методов, связанных с обработкой результатов наблюдений и с установлением экспериментальных законов. Но биологическая статистика – это только один из этапов университетского математического образования студентов-биологов. Начало должно быть положено курсом высшей математики, причем объем и содержание курса высшей математики для биологов не должны повторять курс математики для технических и математических специальностей.

При составлении программы курса "Высшая математика" для студентов биологического факультета необходимо учитывать то, что для биолога наиболее важным является практический аспект математики, и, следовательно, он должен уметь:

- ставить математические задачи;
- грамотно построить математическую модель изучаемого явления;
- выбрать и применить качественные математические методы исследования;
- грамотно произвести необходимые вычисления с применением современных вычислительных машин;
- использовать полученные результаты для прогнозирования и принятия решений.

Курс "Высшей математики" для студентов-биологов должен содержать обязательно такие разделы, как: комплексные числа; матрицы и определители; системы линейных уравнений; анализ функций одной переменной; анализ функций многих переменных; дифференциальные уравнения; теория вероятностей и математическая статистика.

Выбор этих разделов основан на том, что именно они наиболее широко используются в таких областях теоретической и прикладной биологии, как биогеоцентология, почвоведение, экология, генетика, биохимия, биофизика, физиология и в частных отделах зоологии, ботаники, микробиологии.

При изучении каждого из вышеперечисленных разделов математики на биологическом факультете должен использоваться принцип профессиональной (биологической) направленности, т.е. наряду с изучением общих методов должны рассматриваться и более частные специальные методы, непосредственно связанные с реальными биологическими объектами.

Таким образом, большое внимание необходимо уделять методам моделирования биологических процессов, так как сегодня математическое моделирование в биологии развивается весьма бурно. Ведь моделирование – это метод, который позволяет произвести замену изучения некоторого сложного объекта (явления, процесса) исследованием его модели, которая представляет собой некоторое упрощение объекта исследования и в смысле его структуры, и по сложности внутренних и внешних связей. Другими словами, каждому исследуемому биологическому объекту стараются поставить в соответствие подходящий математический объект (число, множество, матрицу, функцию и т.д.), а связи и отношения между биологическими объектами записать с помощью математических соответствий и отношений (равенств, неравенств, уравнений, систем уравнений и т.д.). Таким образом, получают математическое описание биологического явления – математическую модель, которую в свою очередь изучают при помощи математики.

Изучая математические модели, изучают тем самым указанные реальные явления. Но следует помнить, что нельзя отождествлять математическую модель с реальным явлением и, что любое математическое описание биологического процесса означает некоторую его логическую идеализацию. При этом следует учитывать, что это описание происходит с определенной степенью точности и в результате отбрасывают ряд факторов, которые могут в каком-то смысле существенно повлиять на конечный результат.

Поэтому при изучении математических моделей большую роль играет биологическая эрудиция, знания и опыт. И следует помнить, что никакие математические или математико-статистические методы не помогут получить достоверный результат, если к решению биологической задачи подходить формально, без учета биологической сущности изучаемого явления или, если опыты были поведены неправильно и экспериментальные данные собраны небрежно.

Условно процесс моделирования можно свести к следующим шагам:

1. Первичный сбор информации.
2. Постановка задачи.
3. Обоснование основных допущений.
4. Создание математической модели и ее исследование.
5. Проверка адекватности модели реальному объекту и указание границ применимости модели.

Процесс построения математической модели можно, в свою очередь, разделить на следующие этапы:

1. Формулирование законов, связывающих основные объекты модели.
2. Запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели (составление равенств, неравенств, уравнений и т.д.), т.е. создание математических формулировок задач.
3. Выбор метода исследования сформулированных математических задач.
4. Проведение исследования математических задач, к которым приводит данная математическая модель.

Поскольку общих методов составления математических отношений при решении биологических задач нет, то навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате изучения конкретных примеров, которых надо рассмотреть достаточное количество на проводимых учебных занятиях. Причем следует заметить, что проверка адекватности модели реальному объекту – это сугубо научно-исследовательский процесс, и провести его в общем курсе математики невозможно, т.к. этот процесс, как правило, связан с дополнительными и повторными исследованиями. Поэтому для рассмотрения на занятиях должны выбираться хорошо известные и изученные модели.

Также следует отметить и показать на примерах, что в силу большой абстрактности одна и та же математическая модель может описывать различные процессы (например, одно и то же дифференциальное уравнение описывает и характер радиоактивного распада, и изменение температуры тела).

При построении общеобразовательного курса математики следует учитывать и то, что он может содержать только начальные положения математического моделирования, которые доступны для изложения преподавателем математики и для восприятия студентами младших курсов. Причем начальные положения математического моделирования используются уже на начальном обучающем уровне, когда при изучении многих специальных дисциплин используются математические объекты. Такой подход дает возможность приводить простейшие примеры построения математических моделей, в которых математика выступает как синтезирующий фактор междисциплинарных связей в процессе обучения.

Одним из ярких примеров, который можно рассмотреть в курсе "Высшая математика" на биологическом факультете, является модель роста численности популяций, которая имеет важное значение в биологии и медицине. В свое время такими крупными учеными, как Т. Мальтус (1766 – 1834), П. Ферхюльст (1804 – 1849) и В. Вольтерра (1860 – 1940) были предложены математические модели, позволяющие найти зависимость изменения численности популяции от времени для различных условий функционирования системы. Эти модели не потеряли своей актуальности и сегодня. Так, модели Мальтуса и Ферхюльста являются основой моделирования процессов в биотехнологии, например, для установления оптимальных режимов выращивания микроорганизмов. А модель Вольтерра широко используется в медицине, например, при моделировании онкологических заболеваний. Рассмотрим эти модели.

Реальная система. Имеется некоторая популяция одного вида, в которой происходят жизненные процессы во всем их многообразии.

Постановка задачи. Найти законы изменения численности популяции во времени.

Основные допущения. 1) Существуют только процессы размножения и естественной гибели, скорости которых пропорциональны численности особей в данный момент времени. 2) Не учитываются биохимические и физиологические процессы. 3) Нет борьбы между особями за место обитания, за пищу (бесконечно большое пространство и количество пищи). 4) Рассматривается только одна популяция, нет хищников.

Модель. Введем обозначения: x – численность популяции в момент времени t; R – скорость размножения; γ – коэффициент размножения; S – скорость естественной гибели; σ – коэффициент естественной гибели; $\frac{dx}{dt}$ – скорость изменения численности популяции; ε – коэффициент роста.

Тогда если все выше названные допущения выполняются, то получим модель естественного роста численности популяции (модель Мальтуса) и $R = \gamma x$, $S = -\sigma x$.

Составим дифференциальное уравнение баланса. Изменение численности особей в единицу времени определяется количеством рожденных за это время и умерших:

$$\frac{dx}{dt} = (\gamma - \sigma)x, \text{ или } \frac{dx}{dt} = \varepsilon x.$$

Решая это уравнение и учитывая, что в начальный момент времени $t = 0$ численность особей $x = x_0$, получим, что $x = x_0 e^{\varepsilon t}$.

Проверка адекватности модели реальному объекту. а) Если $\varepsilon < 0$ ($\sigma > \gamma$), т.е. когда скорость гибели равна скорости размножения, то численность особей со временем упадет до нуля. б) Если $\varepsilon > 0$ ($\sigma < \gamma$), т.е. когда скорость гибели меньше скорости размножения, то численность особей неограниченно растет со временем. в) Если $\varepsilon = 0$ ($\sigma = \gamma$), т.е. когда скорость гибели больше скорости размножения, то численность особей не изменяется, оставаясь на начальном уровне.

Модель при $\varepsilon > 0$ адекватна реальности только до определенных значений времени. В реальности невозможно бесконечное возрастание численности популяции и при большом количестве особей возможно уменьшение их численности, например, за счет борьбы за место обитания и пищу.

Рассмотрим модель изменения численности популяции с учетом конкуренции между особями (*модель Ферхюльста*). В данном случае рассмотренная выше модель усложняется тем, что среди приведенных допущений снимается допущение 3, т.е. существует борьба между особями.

Считая, что скорость гибели за счет конкуренции между особями пропорциональна вероятности встреч двух особей, можно записать $S = -\delta x^2 - \sigma x$, где δ – коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение баланса численности особей имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \sigma x - \delta x^2, \text{ или } \frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \delta x^2.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение. Решая это уравнение и учитывая, что в начальный момент времени $t = 0$ численность особей $x = x_0$, получим, что

$$\ln\frac{x}{x_0} - \ln\frac{\varepsilon - \delta x}{\varepsilon - \delta x_0} = \varepsilon t, \text{ или } x(t) = \frac{x_0 \varepsilon}{(\varepsilon - \delta x_0)e^{-\varepsilon t} + \delta x_0}.$$

Видно, что с течением времени численность популяции x “не уходит в бесконечность”, а выходит на стационарный уровень, $x_{cm} = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$.

С наиболее сильными студентами в процессе научно-исследовательской работы или на спецкурсе можно рассмотреть более сложную модель “хищник-жертва” (*модель Вольтерра*). В данном случае среди выше введенных допущений снимается допущение 4.

Например, в некотором пространстве живут два вида особей: зайцы (жертвы) и волки (хищники). Зайцы питаются растительной пищей, имеющейся всегда в достаточном количестве, и между ними отсутствует внутренняя вражда. Волки могут питаться только зайцами.

Построим модель. Для этого введем обозначения: x – число жертв в момент времени t; y – число хищников в момент времени t; R – скорость размножения жертв; γ – коэффициент размножения жертв; S – скорость естественной гибели жертв; σ – коэффициент естественной гибели жертв; T – скорость гибели жертв за счет встречи с хищником; α – коэффициент гибели жертв за счет встречи с хищником; $\varepsilon = (\gamma - \sigma)$ – коэффициент роста жертв; R^* – скорость размножения хищников; δ – коэффициент размножения хищников; S^* – скорость естественной гибели хищников; β – коэффициент естественной гибели хищников.

Уравнения баланса между численностью рожденных и гибнущих особей имеют вид:

для жертв – $$\frac{dx}{dt} = \gamma\, x - \sigma\, x - \alpha\, x\, y = R - S - T;$$

для хищников – $$\frac{dy}{dt} = \delta\, x\, y - \beta\, y = R^* - S^*.$$

В итоге имеем сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon\, x - \alpha\, x\, y; \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta\, x\, y - \beta\, y. \end{cases}$. Решая данную систему, получим, что

$$x(t) = \frac{\beta}{\delta} + U \sin\sqrt{\varepsilon\beta}\, t \quad \text{и} \quad y(t) = \frac{\varepsilon}{\alpha} + V \sin(\sqrt{\varepsilon\beta}\, t + \varphi_0),$$

где $\dfrac{V}{U} = \dfrac{\delta}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\beta}}$. Таким образом, численности популяций x и y испытывают гармонические колебания относительно стационарных значений с одинаковой частотой $\varpi = \sqrt{\varepsilon\, \beta}$, но смещенные по фазе φ_0. Периодичность изменения численности хищников и жертв наблюдалось и на опыте.

Подчеркнем еще раз, что математическое моделирование заслуживает особого внимания, т.к. оно завоевывает все новые области своего применения, и огромное количество задач из различных областей науки могут быть решены при его помощи.

Также для многих областей науки математическое моделирование играет синтезирующую роль, так, например, сотрудничество биологов, физиков и математиков привело к созданию биофизических математических моделей, и сегодня они рассматриваются практически в каждом разделе биофизики. Поэтому следует уделять большое внимание моделям, учитывающим междисциплинарные связи курсов биологии, физики и химии.

Математическое моделирование также является экономически выгодным средством для проведения научных исследований. Так, математическая модель позволяет

- ускорить или замедлить течение изучаемого процесса (как это предложено, например, в моделях эволюции некоторых популяций);
- рассмотреть изучаемый процесс в стационарном режиме (как это предложено, например, в модели сокращения мышцы);
- рассмотреть процесс в условиях, которые невозможно создать на земле (например, при изучении процессов, связанных с отсутствием действия гравитационных сил) и т.д.

Описанный выше подход к преподаванию моделирования позволяет сделать математическое моделирование средством освоения методологии профессионально ориентированного научного поиска, способствует развитию критического мышления, выработке навыков и умений использования получаемой информации, ее переводу в абстрактные формы, обобщению ее смыслового содержания.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Кудрявцев, Л.Д.*** Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1980. – 144 с.
2. ***Скатецкий, В.Г.*** Профессиональная направленность преподавания математики: теоретический и практический аспекты / В.Г. Скатецкий. – Мн.: БГУ, 2000. – 160 с.
3. ***Еровенко-Риттер, В.А.*** Философско-образовательное значение математики / В.А. Еровенко-Риттер // Педагогика. – № 5. – 2004. – С. 35-39.
4. ***Романовский, Ю.М.*** Математическое моделирование в биофизике / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
5. Биофизика / В.Ф. Антонов [и др.]. – М.: Владос, 2003. – 288 с.
6. ***Лакин, Г.Ф.*** Биометрия / Г.Ф. Лакин. – М.: Высшая школа, 1980. – 294 с.
7. ***Еровенко, В.А.*** Афоризм Даламбера, или о преподавании математики студентам-нематематикам / В.А. Еровенко, Н.В. Кепчик // Тезисы докладов международной математической конференции "Еругинские чтения X". Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 24-26 мая 2005. Могилевский гос. ун-т. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – С. 202-203.

Поступила в редакцию 20.11.2005 г.