УДК 378.147:51

О.М. МАТЕЙКО, В.Г. СКАТЕЦКИЙ

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ГЕОЛОГО-ГЕОГРАФИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Математические методы давно и успешно применяются в географии и геологии. Однако нередко преподавание высшей математики студентам геолого-географических специальностей ведется без учета этого факта. Чтобы усилить мотивацию студентов, курс лекций по математике должен содержать расширение известных интерпретаций математических понятий, элементы математического моделирования некоторых геолого-географических процессов и явлений. Задачи, предлагаемые на практических занятиях, необходимо подбирать в соответствии с основной специализацией студентов, при этом показывается возможность применения математических знаний в сфере их профессиональной деятельности.

В статье рассматриваются основные положения концепции профессиональной направленности преподавания математики применительно к геолого-географическим специальностям. Приведены примеры математических объектов, которые используются при изложении специальных географических дисциплин; строятся математические модели некоторых процессов, протекающих в природных системах.

Математические методы, начиная с 50-х годов XX века [1], с успехом применяются в географии и геологии. Для решения задач кристаллографии широко используется векторная и матричная алгебра, аналитическая геометрия, различные разделы дифференциального исчисления. Расчеты расстояний между структурными скважинами при разведке и разработке массивных заложений производятся с применением определенных интегралов. Задачи о тепловых потоках от пласта к окружающим породам и о движении газа в пористой среде решаются с помощью дифференциальных уравнений.

В процессе математизации географии наиболее просто в нее вошла математическая статистика. Это позволило традиционные географические описания при стандартизации легко сводить в таблицы и полученный обширный материал легко "свертывать" с помощью статистического анализа. Операции сравнения, выявления сходства и различий между объектами при создании классификаций или при районировании (традиционные географические задачи) также в значительной мере опираются на приемы, вытекающие из статистических описаний.

Однако учебный процесс не всегда успевает перестроиться, чтобы удовлетворять современным требованиям науки и практики. Нередко осуществляется разрозненное преподавание математики и специальных географических дисциплин, и математика остается системой, замкнутой в себе. Поэтому возникают нарекания о том, что математики учат студентов не тому, что им понадобиться при дальнейшей учебе и в профессиональной деятельности.

Преодолеть это можно, если обучение математике на факультетах нематематического профиля осуществлять, используя концепцию профессиональной направленности преподавания математики [2], позволяющую в процессе обучения максимально удовлетворять тем требованиям, которые предъявляются к математическому образованию студентов соответствующей специальности.

Выделим основные положения этой концепции применительно к геолого-географическим специальностям.

Специальная интерпретация некоторых математических объектов. Изучая, например, производную и рассматривая традиционно ее геометрический и физический смысл, можно дать еще одну ее интерпретацию, используя понятие уклона. Уклон представляет собой один из основных морфометрических показателей, характеризуя общий облик рельефа, проходимость и условия возведения сооружений. Средний уклон определяют как тангенс угла, образуемого линией профиля с отрицательным направлением оси абсцисс, если положительное направление оси абсцисс выбрать по направлению падения склона. Если профиль изображен не ломаной, а кривой линией, то средний уклон между двумя точками определяют как тангенс угла наклона секущей, проведенной через эти точки. Наконец, уклоном в данной точке называется тангенс угла наклона касательной к кривой в этой точке. Направим ось абсцисс по падению склона, выберем на склоне две точки M и N, соединим их секущей MN и обозначим через α_{MN} угол, образуемый секущей с отрицательным направлением оси абсцисс (рис. 1).

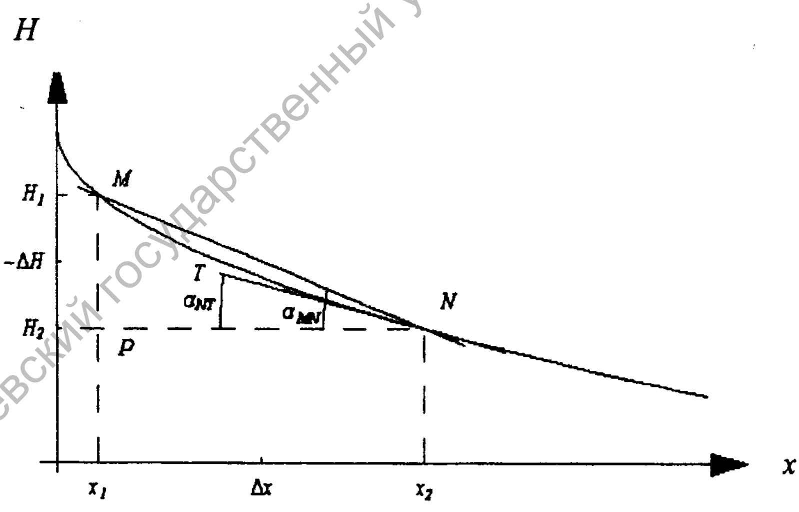

Рис. 1

Рассмотрим треугольник MNP. Средний уклон $i_{MN} = tg\alpha_{MN} =$

$\frac{H_1 H_1'' - H_2}{x_2 - x_1} \frac{\Delta H}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ точка M $\to$ N, а отношение $\frac{\Delta H}{\Delta x} \to \frac{dH}{dx}$.

Таким образом, уклон i_N в точке N выражается равенствами

$$i_N = tg\alpha_{NT} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) = -\frac{dH}{dx}. \qquad (1)$$

Следовательно, уклон профиля в данной точке оказывается численно равным производной высоты по расстоянию, взятой с отрицательным знаком. Таким образом, уклон выражается через математический объект.

Элементы начал математического моделирования. Следует отметить, что начала математического моделирования фактически распадаются на два этапа. Первый этап, когда отдельным физическим, химическим, биологическим и т.п. предметам, а также явлениям, технологическим процессам ставится в соответствие известный математический объект; и второй, – когда после означенного соответствия необходимо решать поставленную прикладную задачу мотивированного содержания.

Поясним сказанное примерами. К понятию функции при изложении соответствующей темы в курсе математики могут приводить изучения различных явлений. Например, каждому моменту времени в данной местности соответствует определенная температура воздуха; атмосферное давление изменяется в зависимости от высоты местности; продуктивность водоема зависит от продолжительности солнечного освещения, морские приливы и отливы периодически повторяются в зависимости от фазы Луны и т.д. Во всех этих случаях значению одной величины (время, высота над уровнем моря, продолжительность солнечного освещения, положение Луны) ставится в соответствие определенное значение другой величины по определенному закону. Здесь же целесообразно привести примеры графического задания функции как результата работы приборов самописцев, имеющихся на метеорологических станциях, которые регистрируют величины атмосферного давления, температуры воздуха, его влажности в любое время суток. Расшифровав такой график, можно определить значения указанных величин.

При изложении темы "Векторы" следует отметить, что векторы применяются в климатологии при рассмотрении ветровых движений (пример задачи: разложить северо-западный ветер, скорость которого 10 м/с на западную и северную компоненты) и в геоморфологии, где с их помощью оценивают влияние наклона долины на степень размыва речного русла.

При изучении темы "Матрицы" в качестве примеров можно брать различные таблицы, содержащие, например, данные об осадках в некоторой местности (в строках – данные по году, в столбцах – по сезону), в виде матрицы может быть представлена речная сеть, можно производить оценку миграции населения и т.д. С помощью алгебры матриц обычные географические описания (по существу, многомерные) переводятся на формализованный язык, доступный для математической обработки.

Следует обратить внимание студентов на то, что, используя математический аппарат, можно исследовать природные закономерности, проводить прогнозирование событий, анализировать прошедшие. Для этого необходимо владеть приемами перевода этих задач на математический язык. Одной из первых задач исследователя, например, при обработке экспериментальных данных является нахождение имеющейся функциональной зависимости между измеренными величинами.

Второй этап является более сложным по двум причинам. Во-первых, необходимо сделать обоснование построения математической модели, базирующегося на исходных сведениях, в качестве которых могут выступать специальная теория или часть ее, какой-то закон, свойство процесса или обоснованное допущение и т.п.; и, во-вторых, изложение необходимого материала для обоснования модели требует значительных затрат времени.

Укажем некоторые примеры, которые можно приводить, читая курс высшей математики для студентов геолого-географических специальностей. Часть из них позаимствована из учебных пособий [3, 4] и после методической обработки приводится в настоящей работе.

1. Аналитическое описание изменений очертаний профиля во времени

Обоснование модели. Рассмотрим простейшую кинематическую модель сводового тектонического поднятия, которое имеет постоянную ширину $2l$, и достаточно большую длину. Будем считать, что поднятие зависит от времени t и протекает сначала быстро, а затем постепенно затихает и достигает максимального значения, которое обозначим H_m. При этом распределение интенсивности движений во всех поперечных сечениях процесса поднятия одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением профиля поднятия в одном поперечном сечении, которое имеет симметрическую форму относительно вертикальной оси (рис. 2).

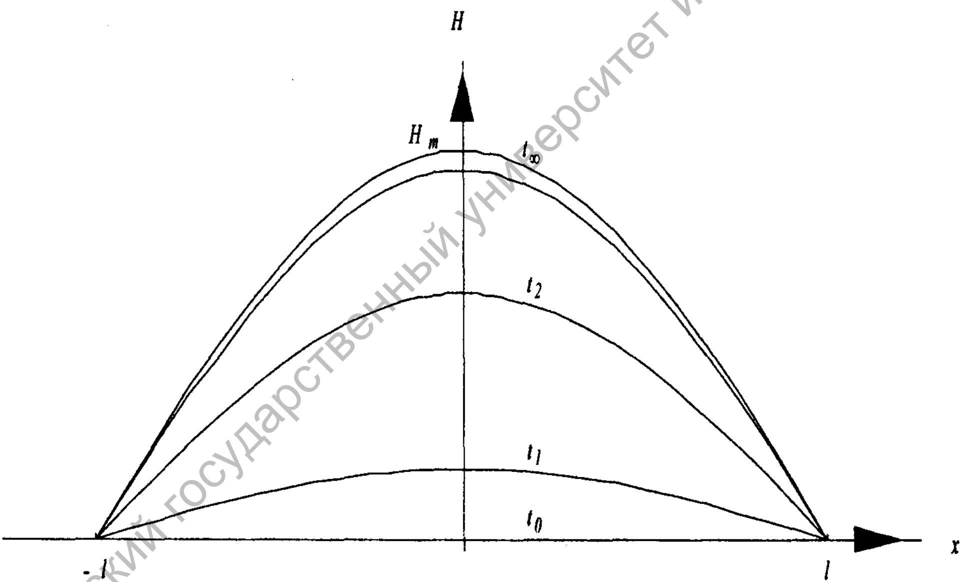

Рис. 2

Построение модели. Выберем систему координат так, что вертикальная ось H направлена вверх по оси симметрии, а горизонтальная x – по основанию сечения, где $H = 0$. Обозначим через $X(x)$ функцию, описывающую высоту свода в разных точках x. Эта функция должна быть симметрична относительно оси высот H, и обращаться в нуль на обеих границах поднятия, при $x = l$ и $x = -l$. Таким свойством обладает функция $\cos \Omega x$, где $\Omega = \frac{\pi}{2l}$, т.е. $X(x) = \cos \Omega x$.

Так как процесс поднятия зависит от времени t, протекает сначала быстро, а затем затухает, то таким свойством обладает функция $T(t) = H_m(1 - e^{-p_0 t})$, где p_0 – логарифмический декремент затухания поднятия во времени: чем p_0 больше, тем меньше времени требуется, чтобы поднятие достигло заданной максимальной высоты H_m, и наоборот.

Значит, в конечном виде, функция, описывающая процесс поднятия свода и зависящая от x и t, может быть выражена следующим образом:

$$H = H_m(1 - e^{-p_0 t}) \cos \Omega x. \qquad (2)$$

Задача. Зная, что процесс тектонического поднятия свода выражается формулой (2), определить скорость роста сводового поднятия и вычислить уклон профиля, определяемый функцией H.

Решение.

Функция H зависит от двух переменных x и t. Исследование функции двух переменных сводят обычно к исследованию функции одной переменной. Этого можно достигнуть, полагая временно один из аргументов постоянным и исследуя функцию при переменном значении другого аргумента. Например, придавая в уравнении $H = H(x,t)$ времени t постоянные значения $t = t_1, t_2, t_3, \ldots$ будем получать уравнения очертаний профиля в соответствующие моменты. Вычерчивая графики каждой из функций $H = H(x,t_1)$, $H = H(x,t_2)$, ..., получим семейство кривых, изображающих последовательные очертания перемещающегося профиля в виде косинусоидальных кривых (рис. 2.). Если последовательно придавать постоянные значения расстоянию $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$, будем получать функции $H = H(x_1, t)$, $H = H(x_2, t)$, ..., которые описывают зависимость высоты от времени для какой-либо точки профиля. Взятые вместе, они дают представление о развитии профиля в целом.

Вычислим уклон i, определяемый функцией $H = H(x, t)$. Для этого обратимся к функции $H = H(x, t_1)$. Здесь высота H оказывается функцией только одной переменной x. Поэтому уклон профиля, очертания которого изменяются с течением времени, представляет собой частную производную высоты по расстоянию, взятую согласно формуле (1), с обратным знаком:

$$i = -\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -H'_x(x;t).$$

Рассматривая уравнение $H = H(x_1, t)$, можно определить скорость перемещения профиля как частную производную высоты H по времени t при постоянном значении второй переменной x:

$$V = \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = H'_t(x;t).$$

Вычислим скорость роста сводового поднятия, описываемого уравнением $H = H_m(1 - e^{-p_0 t}) \cos \Omega x$. Дифференцируя по t функцию (2), находим

$$V = \frac{\partial H}{\partial t} = p_0 H_m e^{-p_0 t} \cos \Omega x.$$

Скорость поднятия является функцией двух переменных t и x. Она, как и величина поднятия (2), изменяется в поперечном направлении по косинусоидальному закону, и затухает во времени по экспоненциальному закону.

Пример. Пусть в рассмотренной выше задаче, ширина l = 5 км, полная высота поднятия H_m =100 мм, логарифмический декремент $p_0 = \ln\frac{200}{199} \approx \ln 1{,}005 \approx 0{,}005$.

Тогда функция $H = H_m(1 - e^{-p_0 t})\cos\Omega x$, описывающая кинематическую модель сводового тектонического поднятия принимает вид

$$H = 100\left(1 - \left(\frac{199}{200}\right)^t\right)\cos\frac{\pi}{10}x = 100\left(1 - (0{,}995)^t\right)\cos\frac{\pi}{10}x.$$

При $x = 0$, получаем наибольшую высоту поднятия, которая определяется из равенства $H = 100(1 - (0{,}995)^t)$ при различных значениях времени t. Так, при $t = 1$ год, $H = 0{,}5$ мм, при $t = 10$ лет, $H = 4{,}8$ мм, при $t \to \infty, H \to 100$ мм. При $x = 5$ км, высота поднятия $H = 0$.

Функция скорости роста сводового поднятия $V = p_0 H_m e^{-p_0 t}\cos\Omega x$ при данных значениях принимает вид $V = 0{,}5\,(0{,}995)^t\cos\frac{\pi}{10}x$. При $x = 0$, скорость будет принимать наибольшие значения. Например, при $t = 1$ год, $V = 0{,}497$ мм/год, при $t = 10$ лет, $V = 0{,}475$ мм/год, при $t \to \infty, V \to 0$.

2. Количество воды, проникшей в грунт.

Обоснование модели. Опытным путем установлено, что скорость V инфильтрации воды в почву, как функция времени t, выражается по формуле $V = a + bt^{-0,5}$, где a и b константы. Постоянная a зависит от типа почвы и представляет собой минимальную скорость, с какой вода просачивается в почву до состояния ее полного насыщения. Постоянная b характеризует степень влажности почвы, при $b = 0$ мы имеем скорость инфильтрации в условиях насыщения почвы. Функция V асимптотически стремится к значению a при $t \to +\infty$.

Построение модели. Количество воды ΔQ, проникающей в грунт за время $\Delta t = t_2 - t_1$, будет равно $\Delta Q = V\Delta t$ или в дифференциальном виде $dQ = V dt$. Интегрируя последнее уравнение, получаем общее количество воды

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}(a + bt^{-0,5})dt.$$

3. Вычисление объема холма.

Обоснование модели. Округлые формы рельефа – холмы, вулканические конусы, терриконы, карстовые блюдца и воронки – часто имеют настолько правильные очертания, что их можно рассматривать как тела, образуемые вращением профиля формы вокруг ее оси симметрии. При планировке территории для подсчета объема выемок и насыпей необходимо знать объемы срезаемых и засыпаемых форм рельефа. Объемы вулканических конусов дают представление о количестве продуктов извержений, объемы карстовых воронок – о количестве растворенного материала. Объемы такого рода форм рельефа можно вычислять, воспользовавшись формулой для определения объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

Построение модели. Вычислим этим способом объем холма, профиль которого можно аппроксимировать экспоненциальной функцией

$$H = H_0 e^{-mx}, \tag{3}$$

где H_0 – высота вершины; m – логарифмический декремент, характеризующий крутизну склонов: чем склоны холма круче, тем m больше. Воспользуемся формулой $V=\pi\int\limits_0^{H_0}x^2dH$. Из равенства (3) выразим $x=\frac{1}{m}\ln\frac{H_0}{H}$. Значит,

$$V=\pi\int\limits_0^{H_0}\frac{1}{m^2}\ln^2\frac{H_0}{H}dH.$$

Это несобственный интеграл. При его вычислении используем то, что $\lim\limits_{H\to 0}H\ln H=\lim\limits_{H\to 0}H\ln^2 H=0$, и получим

$$V=\frac{2\pi H_0}{m^2}. \quad (4)$$

Пример. Вычислим объем холма, профиль которого аппроксимируется экспоненциальной функцией (3), где H_0 = 5 м – высота вершины; m = 0,35 – логарифмический декремент. Подставляя значения H_0 и m в выражение (4), находим $V=\frac{2\pi\cdot 5}{0{,}35^2}=256{,}3$ м^3.

Несмотря на сложность процесса математического моделирования, особенно на втором этапе, его фрагментарно следует проводить во время занятий, так как это значительно повышает интерес студентов к изучению высшей математики. Такой методический прием является и психологическим фактором, так как убедительно показывает студентам, насколько важна математика для изучения географии, и настраивает их на серьезное отношение к ее изучению. Кроме того, с помощью математической модели можно рассмотреть многие частные случаи процесса и получить в итоге не только качественные, но и количественные результаты.

Учебно-методическое обеспечение соответствующими средствами обучения. К ним относятся, прежде всего, сборники прикладных задач мотивированного содержания. На кафедре общей математики и информатики БГУ ведется большая работа в этом направлении, изданы и подготовлены к печати несколько учебно-методических пособий, адаптированных к соответствующим специальностям [5, 6].

В пособии [7], предназначенном для студентов географического факультета, рассматриваются задачи из различных разделов географии, которые решаются математическими методами. Приведены примеры, иллюстрирующие основные понятия из таких разделов высшей математики, как алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения. Рассматриваются также математические модели, описывающие некоторые процессы, протекающие в сложных природных и природно-хозяйственных системах. Пособие содержит задачи, вполне доступные для каждого студента, а также ряд более сложных примеров, которые могут использовать хорошо успевающие студенты в качестве дополнительного материала.

Компьютерная поддержка курса математики. Особое место в учебно-методическом обеспечении занимают электронные варианты учебных пособий. Использование учебно-методических материалов в электронном виде способствует повышению познавательной деятельности студентов и приобретению ими навыков самостоятельной работы. На сервере географического факультета БГУ расположены все необходимые студентам материалы, относящиеся к курсу высшей математики: программа курса, список литературы, краткий курс лекций, лабораторный практикум, вопросы к экзамену, задачи для тестирования. Их использование позволяет студентам более эффективно организовать самостоятельную работу и постоянно осуществлять контроль своих знаний.

"Благодаря электронным учебным комплексам, содержащим лекции и практические занятия, а также большое количество учебных задач для самостоятельного решения и разнообразных материалов для самоконтроля, преподаватель уже не тратит время на передачу учебной информации, а получает возможность сосредоточиться на решении творческих и организационных задач. Студенты со своей стороны избавлены от необходимости записывать каждое слово преподавателя, могут активнее участвовать в интеллектуальном процессе обучения", – считают авторы статьи [8].

В настоящее время все шире используются информационные технологии в процессе обучения. Доцентом кафедры С.А. Барвеновым разработана и внедрена на практике методика компьютерного тестирования знаний основ высшей математики студентами 1-го курса юридического факультета. Система подготовки студентов к зачету, базирующаяся на организованной и контролируемой самостоятельной работе студентов описана в статье [9]. Эта методика, позволила повысить уровень обученности студентов, их активность и стремление получать знания с использованием современных технологий, которые не только оптимизируют этот процесс, но и делают его более привлекательным и интересным.

Некоторые математически смоделированные прикладные задачи могут быть решены с привлечением компьютера, что возможно лишь при организации межпредметных связей на должном методическом уровне

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Чертко, Н.К.*** Математические методы в физической географии: Учеб. пособие для геогр. спец. вузов / Н.К. Чертко. – Мн.: Университетское, 1987. – 151 с.
2. ***Скатецкий, В.Г.*** Профессиональная направленность преподавания математики: теоретический и практический аспекты / В.Г. Скатецкий. – Мн.: БГУ, 2000. – 160 с.
3. ***Самнер, Г.*** Математика для географов / Г. Самнер. – М.: Прогресс, 1981. – 296 с.
4. ***Девдариани, А.С.*** Математический анализ в геоморфологии / А.С. Девдариани. – М.: Недра, 1967. – 156 с.
5. ***Скатецкий, В.Г.*** Математическое моделирование физико-химических процессов: Учебное пособие для студентов химических и химико-технологических специальностей / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Мн.: БГУ, 2003. – 393 с.
6. ***Кепчик, Н.В.*** Высшая математика: учеб.-метод. рекомендации для студентов биологического факультета. В 2 ч. / Н.В. Кепчик, Н.А. Дегтяренко, Т.И. Рогачевич. – Мн.: БГУ, 2005. – 97 с.
7. ***Матейко, О.М.*** Высшая математика. Примеры и задачи. Учебно-методическое пособие для студентов географического факультета / О.М. Матейко, П.В. Плащинский. – Мн.: БГУ, 2005. – 47 с.
8. ***Еровенко, В.А.*** Тест Тьюринга и компьютерная поддержка математического образования / В.А. Еровенко, О.В. Тимохович // Адукацыя і выхаванне. – 2004. – № 3. – С. 29-35.
9. ***Барвенов, С.А.*** Компьютерные технологии в организации самостоятельной работы студентов-гуманитариев / С.А. Барвенов // Вышэйшая школа. – № 4. – 2004. – С. 35-37.

Поступила в редакцию 20.03.2006 г.