УДК 512.542

В.Г. САФОНОВ, А.И. РЯБЧЕНКО

О ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ С π-РАЗЛОЖИМЫМ ДЕФЕКТОМ 1

Работа посвящена изучению решеточного строения частично насыщенных формаций конечных групп. Основным рабочим инструментом исследования является понятие $\mathfrak{H}$-дефекта ω-насыщенной формации. При этом под $\mathfrak{H}$-дефектом ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ понимают длину решетки ω-насыщенных формаций, заключенных между формацией $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

В случае, когда $\mathfrak{H}$ – формация всех π-разложимых групп, $\mathfrak{H}$-дефект ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называют ее π-разложимым l^{ω}-дефектом. Доказано, что π-разложимый l^{ω}-дефект частично насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен 1 в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ представима в виде решеточного объединения минимальной ω-насыщенной не π-разложимой подформации и некоторой ω-насыщенной π-разложимой подформации формации $\mathfrak{F}$. Приведен ряд следствий.

Полученные результаты являются естественным развитием исследований, связанных с изучением решеточного строения частично насыщенных формаций, имеющих заданный нильпотентный или разрешимый l^{ω}-дефекты. Работа может быть полезна при изучении и классификации ω-насыщенных формаций с заданной структурой ω-насыщенных подформаций.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используется терминология из [1-3].

В работе [4] было введено понятие "$\mathfrak{H}$-дефект насыщенной формации" и получена классификация насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2. При этом под $\mathfrak{H}$-дефектом насыщенной формации $\mathfrak{F}$ понимают длину решетки насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем этот результат получил развитие в разных направлениях, поскольку нашел широкое применение в теоретических исследованиях. С одной стороны, в качестве $\mathfrak{H}$ стали рассматривать другие достаточно хорошо известные классы (А.Н. Скиба, 1991 г., В.В. Аниськов, 1995 – 2003 гг.). С другой стороны, исследовались решетки насыщенных формаций большей длины (В.Г. Сафонов 1996 – 2004 г.). Кроме того, этот подход нашел широкое применение при изучении структурного строения формаций групп других типов (n-кратно насыщенные формации, тотально насыщенные формации и др.).

В теории ω-насыщенных формаций данный метод был использован Дж. Джехадом [5] и Н.Г. Жевновой [6] при изучении p-насыщенных и ω-насыщенных формаций с нильпотентным l^{ω}-дефектом 1. Классификация неразрешимых ω-насыщенных формаций, имеющих разрешимую максимальную ω-насыщенную подформацию, получена в [7].

Естественным развитием исследований в этом направлении является изучение решеточного строения частично насыщенных формаций, близких к $\mathfrak{N}$ по тем или иным свойствам. Так, в совместной работе авторов было дано описание не π-нильпотентной ω-насыщенной формации с π-нильпотентной максимальной ω-насыщенной подформацией [8].

В данной работе получена классификация частично насыщенных формаций π-разложимого l^{ω}-дефекта 1.

Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае π-разложимый l^{ω}-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee^{\omega}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – ω-насыщенная π-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – минимальная ω-насыщенная не π-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом: 1) всякая ω-насыщенная π-разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee^{\omega}(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X})$; 2) всякая ω-насыщенная не π-разложимая подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee^{\omega}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{X})$.*

2. Основные понятия и обозначения

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Тогда через ω' обозначают дополнение к ω во множестве всех простых чисел.

Всякую функцию вида $f\colon \omega\cup\{\omega'\}\to$ {формации групп} называют ω-локальным спутником. Если f – произвольный ω-локальный спутник, то $LF_{\omega}(f)=\{G \mid G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для всех $p\in\omega\cap\pi(G)\}$, где $G\omega d$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K)\cap\omega\neq\varnothing$, $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, равная пересечению централизаторов всех pd-главных факторов группы G.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f ее ω-локальный спутник. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называют внутренним ω-локальным спутником.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп и p – простое число. Тогда полагают, что $\mathfrak{X}(F_p)=\mathrm{form}(G/F_p(G)\mid G\in\mathfrak{X})$, если $p\in\pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(F_p)=\varnothing$, если $p\notin\pi(\mathfrak{X})$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$.

Ввиду теоремы 1 [1, с. 118] формация является ω-локальной тогда и только тогда, когда она является ω-насыщенной.

Через l^{ω} обозначают совокупность всех ω-насыщенных формаций.

Полагают $l^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{F}$ равным пересечению всех тех ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{F}$.

Для любых двух ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H} = l^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Всякое множество ω-насыщенных формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee^{\omega}$, является решеткой. Таковым, например, является множество l^{ω} всех ω-насыщенных формаций.

Через $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^{\omega}$ и называют $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефектом ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{H}$, но все собственные ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Группу G называют π-специальной, если в ней существует нильпотентная нормальная π-холлова подгруппа. Класс всех π-специальных групп совпадает с классом $\mathfrak{N}_{\pi} \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Группу G называют π-замкнутой, если она имеет нормальную π-холлову подгруппу. Класс всех π-замкнутых групп, очевидно, совпадает с $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Группа называется π-разложимой, если она одновременно π-специальна и π'-замкнута.

3. Используемые результаты

Ниже приведем некоторые известные факты теории формаций, сформулировав их в виде следующих лемм.

Лемма 1 [1]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, причем $\mathfrak{M} = LF_p(m)$ для некоторого внутреннего спутника m. Формация $\mathfrak{F}$ является p-локальной в том и только том случае, когда выполняется следующее условие: либо $p \in \pi(\mathfrak{M})$, либо формация $\mathfrak{H}$ является p-локальной. Более того, при выполнении этого условия $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, где $f(p') = m(p')\mathfrak{H}$ и $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{M})$, $f(p) = h(p)$, если $p \notin \pi(\mathfrak{M})$.*

Следствием теоремы 1.2.25 [3] является следующая

Лемма 2 [3]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – полуформация и $A \in \mathfrak{F} = \mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда если A – монолитическая группа и $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$, $M_1, \ldots, M_t$ ($t \geq 2$), что выполняются условия: (1) $H/N \cong A$, $M/N = Soc(H/N)$; (2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$; (3) H/N_i – монолитическая $\mathfrak{F}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N; (4) $M_1 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$.*

Лемма 3 [2]. *Пусть M и N – нормальные подгруппы группы G, причем $M \subseteq C_G(N)$. Тогда $[N](G/M) \in \mathrm{form}G$.*

Лемма 4 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-насыщенная не π-разложимая формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется, по крайней мере, одна минимальная ω-насыщенная не π-разложимая подформация.*

Следствием леммы 5.2.8 [3, с. 194] является

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t соответственно $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ и $m, r < \infty$, то $t \leq m + r$.*

Лемма 6 [1]. *Решетка всех ω-насыщенных формаций l^{ω} модулярна.*

Лемма 7 [1]. *Если $\mathfrak{F}=l^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и f – минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:* 1) $f(\omega')=\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G\in\mathfrak{X})$; 2) $f(p)=\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p\in\omega$; 3) *если* $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(h)$ *и* p *– некоторый фиксированный элемент из* ω, *то* $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a)=h(a)$ *для всех* $a\in(\omega\backslash\{p\})\cup\{\omega'\}$, $f_1(p)=\mathrm{form}(G \mid G\in h(p)\cap\mathfrak{F},\ O_p(G)=1)$ *и, кроме того,* $f_1(p)=f(p)$; 4) $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(G)$, *где* $g(\omega')=\mathfrak{F}$ *и* $g(p)=f(p)$ *для всех* $p\in\omega$.

Лемма 8 [1]. *Пусть* f_i *– такой внутренний* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *что* $f_i(\omega')=\mathfrak{F}_i$, *где* $i\in I$. *Тогда* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\vee^{\omega}\mathfrak{F}_2=LF_{\omega}(f)$, *где* $f=f_1\vee f_2$.

Лемма 9 [10]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная* ω*-насыщенная не* π*-разложимая формация, когда* $\mathfrak{F}=l^{\omega}\mathrm{form}G$, *где* G *– такая не* π*-разложимая монолитическая группа с монолитом* P, *что* $\pi(G)\cap\pi=\varnothing$ *и либо* $\tau=\pi(P)\cap\omega=\varnothing$ *и* P *совпадает с* π*-разложимым корадикалом группы* G, *либо* $\tau\neq\varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:* 1) *группа* P *неабелева, причем, если* $\tau\subseteq\pi'$, *то* G/P *–* π'*-группа, если* $\tau=\{p\}\subseteq\pi$, *то* G/P *–* p*-группа, если же* $\tau\cap\omega\neq\varnothing$ *и* $|\tau|>1$, *то* $G=P$ *– простая неабелева группа;* 2) G *– группа Шмидта:* 3) $G=[P]H$, *где* $P=C_G(P)$ *– минимальная нормальная подгруппа группы* G, H *– простая неабелева группа, причем* $\pi\cap\pi(H)=\varnothing$.

Лемма 10 [2, с. 41]. *Пусть* A *монолитическая группа с неабелевым монолитом,* $\mathfrak{M}$ *– некоторая полуформация и* $A\in\mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда* $A\in\mathfrak{M}$.

Лемма 11 [1]. *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *являются* ω*-насыщенными, то формация* $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *также является* ω*-насыщенной.*

Лемма 12 [1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-насыщенная формация и* f *– ее* ω*-локальный спутник. Если* $G/O_p(G)\in f(p)\cap\mathfrak{F}$, *то* $G\in\mathfrak{F}$.

Следующая лемма является частным случаем леммы 5.2.7 [3, с. 193].

Лемма 13. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *–* ω*-насыщенные формации и* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. *Тогда* $|\mathfrak{M}:\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}|^{\omega}\leq|\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}|^{\omega}$.

Лемма 14 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– произвольная непустая формация и пусть у каждой группы* $G\in\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$*-корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ *не имеет фраттиниевых* G*-главных факторов. Тогда если* A *– монолитическая группа из* $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{F}$, *то* $A\in\mathrm{H}(\mathfrak{X})$.

4. Основной результат

В дальнейшем через $\mathfrak{X}$ будем обозначать формацию всех π-разложимых групп, а $\mathfrak{X}$-дефект ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называть ее π-разложимым l^{ω}-дефектом. Заметим, что класс всех π-разложимых групп совпадает с классом $\mathfrak{G}_{\pi}$, $\mathfrak{G}_{\pi}\cap\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi'}$.

Лемма 15. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– некоторая формация. Тогда формация* $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{H}$ *является* ω*-насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{H}$. Как известно, формация $\mathfrak{N}_{\omega}$ является насыщенной и, следовательно, ω-насыщенной для всякого непустого множества простых чисел ω. В силу леммы 7 формация $\mathfrak{N}_{\omega}$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник n, что $n(p)=1$ для любого $p\in\omega$ и $n(\omega')=\mathfrak{N}_{\omega}$.

Так как для любого $p\in\omega$ справедливо включение, то применяя лемму 1 заметим, что $\mathfrak{F}$ – p-локальная формация. Следовательно формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной или ω-насыщенной. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть* A *– простая группа,* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{L}$ *– некоторые непустые формации. Тогда если* $A\in\mathfrak{M}\vee\mathfrak{L}$, *то* $A\in\mathfrak{M}\cup\mathfrak{L}$.

Доказательство. Предположим, что $A\notin\mathfrak{M}\cup\mathfrak{X}=\mathfrak{F}$. Тогда в силу леммы 2 в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$, $M_1, \ldots, M_t$ $(t\geq 2)$, что выполняются условия: (1) $H/N\cong A$, $M/N=Soc(H/N)$; (2) $N_1\cap\ldots\cap N_t=1$; (3) H/N_i – монолитическая $\mathfrak{F}$-группа с монолитом M/N_i, который H-изоморфен M/N; (4) $M_1\cap\ldots\cap M_t\subseteq M$.

Ввиду леммы 3 имеем $[M/N_i]((H/N_i)/C_{H/N_i}(M/N_i))$ form(H/N_i).

Пусть A – группа простого порядка. Тогда ввиду (1) $M/N=H/N$ – абелев фактор. Поэтому $C_H(M/N)=H$. В силу условия (3) $C_H(M/N_i)=C_H(M/N)=H$. Поскольку $C_{H/N_i}(M/N_i)=C_H(M/N_i)/N_i$, то $(H/N_i)/C_{H/N_i}(M/N_i) \cong H/C_H(M/N_i)=H/H=1$. Значит, $M/N_i\in$ form(H/N_i). Но ввиду (3) $H/N_i \in \mathfrak{F}=\mathfrak{M}\cup\mathfrak{L}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ – формации, то $A \cong M/N_i \in\mathfrak{M}\cup\mathfrak{L}$.

Пусть теперь A – простая неабелева группа. Тогда в силу леммы 10 получаем $A\in\mathfrak{M}\cup\mathfrak{L}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть π-разложимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Так как $\mathfrak{F}$ не является π-разложимой формацией, то по лемме 4 в $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная ω-насыщенная не π-разложимая подформация $\mathfrak{H}_1$. По условию $\mathfrak{M}=\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$ – максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee^\omega\mathfrak{H}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee^\omega\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ – ω-насыщенная π-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ – минимальная ω-насыщенная не π-разложимая подформация $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{X}$. Пусть π-разложимые l^ω-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_1$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ – ω-насыщенная π-разложимая формация, то $m=0$. Так как $\mathfrak{H}_1$ – минимальная ω-насыщенная не π-разложимая формация, то ее π-разложимый l^ω-дефект r равен 1. В силу леммы 5 для π-разложимого l^ω-дефекта формации $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство $t \le m+r = 0+1 = 1$.

Если $t = 0$, то $\mathfrak{F}$ – π-разложимая формация, что противоречит условию $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{X}$. Таким образом, $|\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}|^\omega=1$.

Докажем теперь справедливость утверждения 1) второй части теоремы.

Так как $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1$ – максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}_1$, то, в силу леммы 6, имеет место решеточный изоморфизм

$$(((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega\mathfrak{M})\vee^\omega\mathfrak{H}_1)/^\omega((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{H}_1/^\omega\mathfrak{H}_1\cap((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega\mathfrak{M}) =$$
$$= \mathfrak{H}_1/^\omega(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega(\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1/^\omega\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, $(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega\mathfrak{M}$ – максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{X}$, то всякая ω-насыщенная π-разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}_1)\vee^\omega\mathfrak{M}$.

Для доказательства утверждения 2) покажем прежде, что в $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не π-разложимых подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Пусть $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ – π-разложимая максимальная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим обратное, т.е. что в $\mathfrak{F}$ существует $\mathfrak{H}_2$ – минимальная ω-насыщенная не π-разложимая подформация, отличная от $\mathfrak{H}_1$. Поскольку $\mathfrak{M}_1$ является π-разложимой формацией, то $\mathfrak{H}_2\not\subseteq\mathfrak{M}_1$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_2\vee^\omega\mathfrak{M}_1=\mathfrak{H}_1\vee^\omega\mathfrak{M}_1$.

Из леммы 9 следует, что $\mathfrak{H}_i=l^\omega$formG_i, где G_i – такая не π-разложимая монолитическая группа с монолитом P_i, что $\pi(G_i)\cap\pi=\varnothing$ и либо $\tau=\pi(P_i)\cap\omega=\varnothing$ и P_i совпадает с π-разложимым корадикалом группы G_i, либо $\tau\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих условий: (1) группа P_i неабелева, причем, если $\tau\subseteq\pi'$, то G/P_i – π'-группа, если $\tau=\{p\}\subseteq\pi$, то G/P_i – p-группа, если же $\tau\cap\omega\,\varnothing$ и $|\tau|>1$, то $G_i=P_i$ – простая неабелева группа; (2) G_i – группа Шмидта; (3) $G_i=[P_i]H_i$, где $P_i=C_{G_i}(P_i)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_i; H_i – простая неабелева группа, причем $\pi\cap\pi(H_i)=\varnothing$.

По лемме 7, формации $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{M}_1$ имеют такие внутренние ω-локальные спутники h_i и m соответственно, что $h_i(a)=$form$(G/F_a(G_i) \mid G_i\in\mathfrak{H}_i)$, если $a\in\omega\cap\pi(G_i)$, $h_i(a)=\mathfrak{H}_i$, если $a=\omega'$, $h_i(a)=\varnothing$, если $a\in\omega\setminus\pi(G_i)$, где i=1,2 и $m(a)=$form$(A/F_a(A) \mid A\in\mathfrak{M}_1)$, если $a\in\omega\cap\pi(\mathfrak{M}_1)$, $m(a)=\mathfrak{M}_1$, если $a=\omega'$, $m(a)=\varnothing$, если $a\in\omega\setminus\pi(\mathfrak{M}_1)$.

Тогда по лемме 8 получаем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, что $f(p)=h_i(p)\vee m(p)$ для всех $p\in\omega$ и $f(\omega')=\mathfrak{H}_i\vee\mathfrak{M}_1=\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1)\subseteq\mathfrak{F}$.

Пусть G_2 удовлетворяет условию (1), т.е. P_2 – неабелева ωd-группа. Обозначим через $\mathfrak{K}$ формацию, равную $\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1)$. Поскольку, по лемме 15, $\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{K}$ – ω-насыщенная формация и $\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{K}$, то $\mathfrak{F}=l^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1)\subseteq\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{K}$. Но $G_2\in\mathfrak{F}$. Следовательно $G_2\in\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{K}$-корадикал группы G_2 содержится в $\mathfrak{N}_\omega$.

Пусть $G_2^{\mathfrak{K}}\neq 1$. Так как $\mathfrak{K}$-корадикал – нормальная в G_2 подгруппа и P_2 – единственная минимальная нормальная подгруппа в G_2, верно включение $P_2\subseteq G^{\mathfrak{K}}$. Тогда получаем, что P_2 – неабелева минимальная нормальная подгруппа в G_2, содержится в нильпотентной подгруппе $G_2^{\mathfrak{K}}$ группы G_2. Противоречие.

Следовательно, $G_2^{\mathfrak{K}}=1$. Поэтому $G_2\in\mathfrak{K}=\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1)$. Применяя теперь лемму 10, имеем $G_2\in\mathfrak{H}_1\cup\mathfrak{M}_1$. Тогда, так как $G_2\notin\mathfrak{M}_1$, то $G_2\in\mathfrak{H}_1$. Поэтому $\mathfrak{H}_2=l^\omega\mathrm{form}G_2\subseteq\mathfrak{H}_1$.

Поскольку $\mathfrak{H}_2$ – минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{X}$-формация, то $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть группа G_2 удовлетворяет условию (2), т.е. G_2 является группой Шмидта и P_2 – ωd-группа. Поскольку для любой группы A имеет место $l^\omega\mathrm{form}A=l^\omega\mathrm{form}(A/\Phi(A)\cap O_\omega(A))$, то группу G_i ($i=1, 2$) можно считать группой Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, т.е. $G_i=[P_i]H_i$, где группа H_i имеет простой порядок q_i, $P_i=(P_i)$ – минимальная нормальная p_i-подгруппа группы G_i.

Так как $G_2/P_2\in\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1$, $G_2\notin\mathfrak{M}_1$, то $P_2=G_2^{\mathfrak{M}_1}$. Из того, что $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$ и $P_2\in\mathfrak{N}_{p2}$, следует $G_2\in\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$.

По лемме 11, формация $\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$ является ω-насыщенной формацией. Так как $\mathfrak{H}_2=l^\omega\mathrm{form}G_2$, то $\mathfrak{H}_2\subseteq\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$. Тогда $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$, так как $\mathfrak{F}$ – наименьшая ω-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Следовательно, $G_1\in\mathfrak{N}_{p2}\mathfrak{M}_1$. Поскольку, $G_1/P_1\in\mathfrak{M}_1$ и $G_1\notin\mathfrak{M}_1$, то $P_1=G_1^{\mathfrak{M}_1}\in\mathfrak{N}_{p2}$, т.е. P_1 является p_2-группой. Так как $G_2\in\mathfrak{F}$, то $G_2/F_{p2}(G_2)\in f(p_2)=h_1(p_2)\vee m(p_2)$. Но $H_2\cong G_2/P_2=G_2/F_{p2}(G_2)$. Поэтому $H_2\in h_1(p_2)\vee m(p_2)$.

Ввиду пункта 18.20. [2], леммы 7 и замечания 1 [1] формация $\mathfrak{X}$ всех π-разложимых групп имеет такой максимальный внутренний ω-локальный спутник x, что $x(p)=\mathfrak{N}_p$, если $p\in\pi\cap\omega$ и $x(p)=\mathfrak{G}_{\pi'}$ если $p\in\omega\setminus\pi$.

Так как $m(p_2)$ – внутренний спутник формации $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{X}$, то $H_2\in h_1(p_2)\vee m(p_2)\subseteq h_1(p_2)\vee x(p_2)$. Заметим также, что $h_1(p_2)=\mathrm{form}(G_1/F_{p2}(G_1))=\mathrm{form}H_1$. Кроме того $p_2\in\pi\cap\omega$. Таким образом, $H_2\in\mathrm{form}H_1\vee x(p_2)=\mathrm{form}H_1\vee\mathfrak{N}_{p2}=\mathrm{form}(\mathrm{form}H_1\cup\mathfrak{N}_{p2})$. Применяя лемму 16, получаем, что $H_2\in\mathrm{form}H_1\cup\mathfrak{N}_{p2}$.

Заметим, что G_1 удовлетворяет либо условию (2), либо условию (3). Следовательно H_1 является простой группой. Поскольку H_2 – q_2-группа и $q_2\neq p_2$, то $H_2\cong$ H1. Но тогда $G_2/O_{p2}(G_2)=G_2/P_2\cong H_2\cong H_1\cong G_1/F_{p2}(G_1)\in h_1(p_2)\subseteq H_1$. Применяя лемму 12, получаем, что $G_2\in\mathfrak{H}_1$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь для группы G_2 выполняется условие (3), т.е. $G_2=[P_2]H_2$, где $P_2=C_G(P_2)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_2, H_2 – простая неабелева группа, причем $\pi\cap\pi(H_2)=\varnothing$.

Рассуждая аналогично случаю (2), получаем, что P_1 является p_2-группой и $H_2\in h_1(p_2)\vee\mathfrak{N}p_2=\mathrm{form}H_1\vee\mathfrak{N}p_2=\mathrm{form}(\mathrm{form}H_1\cup\mathfrak{N}p_2)$. Но H_2 – простая неабелева группа. Значит, в силу леммы 16, получаем $H_2\in\mathrm{form}H_1\cup\mathfrak{N}p_2$ и $H_2\in\mathrm{form}\mathfrak{H}_1$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь P_2 – ω'-группа. Заметим, что если P_2 – неабелева, то этот случай аналогичен (1). Значит, P_2 – абелева p_2-группа.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\vee^\omega\mathfrak{H}_2$. Поскольку формация $\mathfrak{H}_1$ содержится в формации $\mathfrak{H}$ и π-разложимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{H}_1$ равен 1, то по лемме 13 получаем, что $|\mathfrak{H}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|^\omega\geq 1$. С другой стороны, так как $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$ и π-разложимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то по лемме 13, $|\mathfrak{H}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|^\omega\leq 1$. Значит, π-разложимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{H}$ равен 1. Поэтому в $\mathfrak{H}$ существует π-разложимая максимальная ω-насыщенная подформация $\mathfrak{L}$. Понятно, что $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\vee^{\omega}\mathfrak{H}_1=\mathfrak{L}\vee^{\omega}\mathfrak{H}_2$. Поскольку P_2 является абелевой p_2-группой и единственной минимальной нормальной подгруппой в G_2 такой, что $G_2/P_2\in\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}$, то $G_2^{\mathfrak{L}}=P_2$. Это означает, что $G_2\in\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{H}_2\subseteq\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Кроме того, $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. А так как по лемме 11 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ является ω-насыщенной формацией и $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\vee^{\omega}\mathfrak{H}_2$, то $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\vee^{\omega}\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ и $G_1\in\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Таким образом, аналогично получаем, что P_1 является p_2-группой.

Рассмотрим решетку $\mathfrak{H}\vee^{\omega}\mathfrak{X}/^{\omega}\mathfrak{X}$. Ввиду леммы 6 $\mathfrak{H}\vee^{\omega}\mathfrak{X}/^{\omega}\mathfrak{X}\cong\mathfrak{H}/^{\omega}\mathfrak{X}\cap H=\mathfrak{H}/^{\omega}\mathfrak{L}$.

Таким образом, $\mathfrak{X}$ является максимальной ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{H}\vee^{\omega}\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{H}_1\vee^{\omega}\mathfrak{X}=\mathfrak{H}\vee^{\omega}\mathfrak{X}=\mathfrak{H}_2\vee^{\omega}\mathfrak{X}$. Значит $G_1\in\mathfrak{H}_2\vee^{\omega}\mathfrak{X}$. Следовательно, $G_1\in l^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{H}_2\cup\mathfrak{X})=$ $=l^{\omega}\mathrm{form}(\{G_2\}\cup\mathfrak{X})\subseteq\mathfrak{N}_{\omega}\mathrm{form}(\{G_2\}\cup\mathfrak{X})$.

Так как P_1 – p_2-группа и $p_2\in\omega'$, то $G_1\in\mathrm{form}(\{G_2\}\cup\mathfrak{X})$. По условию $P_2=G^{\mathfrak{X}}$. Поэтому $P_2\not\subset\Phi(G_2)$. Но $G_1\notin\mathfrak{X}$. Значит, $G_1\in\mathrm{form}(\{G_2\}\cup\mathfrak{X})\setminus\mathfrak{X}$. Поскольку для любой группы A из $\{G_2\}\cup\mathfrak{X}$, подгруппа $A^{\mathfrak{X}}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов, то по лемме 14 получаем $G_1\in\mathrm{H}(\{G_2\}\cup\mathfrak{X})$. Так как $G_1\notin\mathfrak{X}$ и $G_2/P_2\in\mathfrak{X}$, то $G_1\cong G_2$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не π-разложимых подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ – произвольная не π-разложимая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда в силу уже доказанного и леммы 4 получаем, что $\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{F}_1$. Следовательно, применяя лемму 6, получаем $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\cap(\mathfrak{H}_1\vee^{\omega}\mathfrak{M})=\mathfrak{H}_1\vee^{\omega}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{M})$. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы.

Если $\omega=\{p\}$, а π – множество всех простых чисел, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *В том и только том случае p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную p-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee^{p}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом: 1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee^{p}(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})$; 2) всякая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee^{p}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{N})$.*

Если π – множество всех простых чисел, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *В том и только том случае ω-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную ω-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee^{\omega}\mathfrak{H}$,* где *$\mathfrak{M}$ – ω-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная ω-насыщенная ненильпотентная формация, при этом: 1) всякая ω-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee^{\omega}(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})$;* 2) *всякая ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$* из *$\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee^{\omega}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{N})$.*

Если ω и π равны множеству всех простых чисел, то из теоремы 1 получаем

Следствие 3 [4]. *В точности тогда нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_{l}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – нильпотентная локальная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом: 1) всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_{l}(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})$; 2) всякая ненильпотентная локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee_{l}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{N})$.*

Если ω – множество всех простых чисел, из теоремы 1 вытекает

Следствие 4. *В точности тогда π-разложимый дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_{l}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – π-разложимая локальная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная локальная не π-разложимая формация, при этом: 1) всякая π-разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_{l}(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X})$; 2) всякая не π-разложимая локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee_{l}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{X})$.*

5. Заключение

В данной работе получено описание не π-разложимых ω-насыщенных формаций с π-разложимой максимальной ω-насыщенной подформацией. Результаты работы, являются новыми и связаны с исследованием структурного строения и классификацией частично насыщенных формаций конечных групп. В доказательствах используются методы абстрактной теории групп, общей теории решеток, а также методы теории формаций конечных групп. Результаты работы и методы исследования могут быть использованы при изучении внутреннего строения частично насыщенных формаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Скиба, А.Н.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. Труды. – 1999. – Т. 2. – № 2. – С. 114-147.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
3. ***Скиба, А.Н.*** Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. ***Скиба, А.Н.*** Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом ≤ 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Математ. заметки. – 1987. – Т. 41. – № 4. – С. 490-499.
5. ***Джехад, Дж.*** Классификация p-локальных формаций длины ≤ 3: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Дж. Джехад; Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель, 1996. – 15 с.
6. ***Жевнова, Н.Г.*** ω-Локальные формации с дополняемыми подформациями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 02.12.01 / Н.Г. Жевнова; Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель, 1997. – 17 с.
7. ***Сафонов, В.Г.*** О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5(32). – С. 162-165.
8. ***Сафонов, В.Г.*** Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вестн. Мозырьского гос. пед. ун-та. – 2005. – № 2(13). – С. 16-20.
9. ***Сафонова, И.Н.*** О существовании $\mathfrak{H}_\omega$-критических формаций / И.Н. Сафонова // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 1999. – № 1. – С. 118-126.
10. ***Сафонова, И.Н.*** К теории критических ω-насыщенных формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. – 2004. – № 11. – С. 9-14.

Поступила в редакцию 07.07.2006 г.