

УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ ИНЪЕКТОРОВ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Пусть $\{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_p, \dots\}$ есть счетное множество классов Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех таких конечных разрешимых групп, которые имеют инвариантные $\mathfrak{F}_i$ -инъекторы для всех $i = 1, 2, \dots, p, \dots$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}_1$ есть примарные формации, то класс $\mathfrak{B}$ является классом всех конечных нильпотентных групп.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.6. Справедливо включение: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ – класс всех конечных нильпотентных групп).

Теорема 1.7. Класс $\mathfrak{B}$ является классом Фиттинга.

Эти теоремы дают обобщение класса всех конечных нильпотентных групп.

Определим подгруппу $\Phi_{\mathfrak{F}}(G)$ как пересечение всех $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп группы G . Если множество $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп группы G пусто, то полагаем, что $\Phi_{\mathfrak{F}}(G) = G$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{A}$, $\text{Ext } \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, $A \subseteq G$ и пусть для любой максимальной подгруппы M группы G , которая содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G , справедливо: либо $A \cap M \subseteq \Phi_{\mathfrak{F}}(A)$, либо $A \subseteq M$. Тогда $A \in \mathfrak{B}$.

Из данной теоремы следуют известные результаты Баумана и Крамера о признаках соответственно нильпотентности и p -нильпотентности подгрупп в конечных группах.

В работе [1] (Bauman Steven) нашел признаки нильпотентности подгрупп в конечных разрешимых группах. Крамер (O.U. Kramer) в [2], расширяя этот результат, нашел признаки p -нильпотентности подгрупп в конечных разрешимых группах (p – простое).

В данной работе мы приводим результаты с более общей точки зрения, которые обобщают результаты Стивена и Крамера. Кроме того, мы обобщаем класс конечных нильпотентных групп, который, помимо самостоятельного интереса, используется при доказательстве некоторых утверждений данной статьи. Все рассматриваемые группы и классы групп берем из класса всех конечных групп. Через $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно обозначаем классы разрешимых и нильпотентных конечных групп. Все необходимые сведения, которые здесь используются, можно найти в книгах [4–5]. Другие свойства инъекторов можно найти в работах [6–9].

1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: а) если $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная подгруппа в G , то $N \in \mathfrak{F}$, б) если M и N – нормальные подгруппы в G и $M \in \mathfrak{F}$, $N \in \mathfrak{F}$, то $MN \in \mathfrak{F}$. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -инъектором [1], если для любой субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathfrak{F}$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой группы V .

Подгруппа V группы G называется **достижимой** в группе G , если V содержится в некотором нормальном ряде группы G .

Подгруппа M группы G называется **$\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой** в G , если $M \in \mathfrak{F}$ и из условий $M \subseteq N \subseteq G$, $N \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $M = N$.

Лемма 1.1. Пусть K – подгруппа группы G , g – произвольный элемент из G , H – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K . Тогда H^g – $\mathfrak{F}$ -инъектор в группе K^g .

Доказательство. Из изоморфизма $H \cong H^g$ следует, что $H^g \in \mathfrak{F}$. Возьмем V – произвольную достижимую подгруппу в группе K . Рассмотрим пересечение

$H^g \cap V^g$. Очевидно, что V^g – достижимая подгруппа в группе K^g . Допустим, что $H^g \cap V^g \subseteq L$, где L – $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в группе V^g . По лемме Гашюца (см. лемму 3.2 в [5]), теперь получим, что $H \cap V \subseteq L^x$, где $x = g^{-1}$. Так как $L^x \in \mathfrak{F}$, то получили противоречие с допущением. Значит $H^g \cap V^g$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой группы V^g . Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть K – нормальная подгруппа группы G , H – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K . Тогда $G = N_G(H)K$.

Доказательство. Пусть g – произвольный элемент из G . Из включения $H \subseteq K$ следует, что $H^g \subseteq K^g = K$. В силу леммы 1.1 получаем, что H^g есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K . Подгруппы H и H^g сопряжены в K с помощью элемента $k \in K$, т.е. $H^k = H^g$. Отсюда получаем, что $H = kg^{-1}H gk^{-1} = (gk)^{-1}H (gk)$. Значит, $gk^{-1} \in N_G(H)$ и $g \in N_G(H)k$. Следовательно, $g \in N_G(H)K$. Поскольку g – произвольный элемент из G , то $G = N_G(H)K$. Лемма доказана.

Лемма 1.3 [11]. Пусть K – нормальная подгруппа группы G , H – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Тогда $K \cap H$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K .

Доказательство. Пусть $K \cap H = L$. Тогда L – нормальная подгруппа в H . Отсюда следует, что $L \in \mathfrak{F}$. Пусть V – произвольная достижимая подгруппа группы K . Так как K – нормальная подгруппа в G , то всякая достижимая подгруппа в K является достижимой подгруппой и в группе G . Тогда $H \cap V$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в группе V . Из очевидного равенства $H \cap K \cap V = H \cap V$ получаем, что $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$ -инъектором группы K . Лемма доказана.

Теорема 1.4. Пусть K – достижимая подгруппа группы G , H – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Тогда $K \cap H$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K .

Доказательство. Поскольку K – достижимая подгруппа в G , то K входит в некоторый нормальный ряд группы G :

$$K = K_n \subseteq K_{n-1} \subseteq \dots \subseteq K_1 \subseteq K_0 = G.$$

В силу леммы 1.3, получим: $K_1 \cap H = H_1$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K_1 , $K_2 \cap (K_1 \cap H)$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K_2 .

Поскольку $K_2 \subseteq K_1$, то получаем, что $K_2 \cap H$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K_2 . Рассуждая аналогично далее, получим, наконец, что $K_n \cap (K_{n-1} \cap H)$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы $K_n = K$. Следовательно, в силу того, что $K_n \subseteq K_{n-1}$ получаем, что $K \cap H$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы K . Теорема доказана.

Возьмем счетное множество классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots\}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех таких конечных разрешимых групп, которые имеют инвариантные $\mathfrak{F}_i$ -инъекторы для всех $i = 1, \dots, n, \dots$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}_i$ есть примарные формации, то класс $\mathfrak{B}$ является классом всех конечных нильпотентных групп.

Лемма 1.5. Пусть F есть $\mathfrak{F}$ -инъектор конечной разрешимой группы G , H – подгруппа группы G такая, что $H \supseteq N_G(F)$. Тогда $H = N_G(H)$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент n из $N_G(H)$. Тогда $H^n = H$. Теперь из включений $F \subseteq N_G(F)$ и $N_G(F) \subseteq H$ (последнее имеет место по условию) получаем, что $F \subseteq H$. Значит, $F^n \subseteq H^n = H$. Поскольку F и F^n – два $\mathfrak{F}$ -инъектора группы G , то по теореме 2.2 из [9] существует такой элемент h из H , что $h^{-1}(F^n)h = F$. Отсюда $(nh)^{-1}F(nh) = F$. Тогда получим, что $nh \in N_G(F) \subseteq H$. Значит, $nh \in H$ и $n \in H$. Следовательно, $N_G(H) \subseteq H$. Поскольку обратное включение очевидно, то получаем равенство: $N_G(H) = H$. Лемма доказана.

Теорема 1.6. Справедливо включение: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $G \neq \langle 1 \rangle$ и $G \in \mathfrak{A}$. Тогда все максимальные подгруппы группы G нормальны в G . Допустим, что существует $\mathfrak{F}$ -инъектор H группы G ,

не являющийся нормальной подгруппой в G . Тогда $N_G(H) \neq G$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , которая содержит $N_G(H)$. По лемме 1.5 имеем, что $M = N_G(M)$. Но из того, что M является нормальной подгруппой в G , следует, что $G = N_G(M)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 1.7. Класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Доказательство. Покажем выполнимость условий (а), (b) в определении класса Фиттинга.

а) Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ -инъекторы H_i группы G нормальны в G ($i=1, 2, \dots, n$). Пусть N – нормальная подгруппа в G . По лемме 1.3 $H_i \cap N$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы N . Кроме того, очевидно, что $H_i \cap N$ есть нормальная подгруппа в N . Значит, $N \in \mathfrak{F}$.

б) Возьмем подгруппы $M \triangleleft G$, $N \triangleleft G$ такие, что $M \in \mathfrak{F}$, $N \in \mathfrak{F}$. Пусть H_i , K_j – $\mathfrak{F}$ -инъекторы групп M и N соответственно. Тогда в силу определения класса $\mathfrak{F}$ имеем $H_i \triangleleft M$, $K_j \triangleleft N$. Покажем, что $H_i \triangleleft MN$. Возьмем в группе MN произвольный элемент x . Тогда $x = mn$. Рассмотрим следующее равенство:

$$(H_i)^{mn} = (mn)^{-1} H_i (mn) = (H_i)^n.$$

Теперь, поскольку $M \triangleleft G$, $n \in G$, то $(H_i)^n \subseteq M$. Кроме того, $(H_i)^n$ является $\mathfrak{F}$ -инъектором в M . По лемме Гашюца (см. лемму 3.2 в [5]) в группе M найдется такой элемент y , что будет выполняться равенство $(H_i)^n = (H_i)^y$. Теперь, ввиду того, что $H_i \triangleleft M$, имеем равенство $(H_i)^n = H_i$. Итак, $(H_i)^x = H_i$. Следовательно, $H_i \triangleleft MN$. Аналогично рассуждая, показываем, что $K_j \triangleleft MN$. Тогда $H_i K_j \triangleleft MN$. Покажем далее, что $H_i K_j$ является $\mathfrak{F}$ -инъектором группы MN . В самом деле, из включений $H_i \in \mathfrak{F}$, $K_j \in \mathfrak{F}$, из условий $H_i \triangleleft MN$, $K_j \triangleleft MN$ и в силу того, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга получаем, что $H_i K_j \in \mathfrak{F}$. Далее, пусть V – произвольная достижимая подгруппа группы MN . Рассмотрим ряд:

$$V = V_0 \triangleleft V_1 \triangleleft \dots \triangleleft V_{n-1} \triangleleft V_n \triangleleft MN$$

Поскольку $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $H_i K_j \triangleleft V_n$, то $H_i K_j \triangleleft V_n \in \mathfrak{F}$. Далее, так как подгруппа $H_i K_j \triangleleft V_{n-1}$ входит в $H_i K_j \triangleleft V_n$ и является нормальной в ней, то $H_i K_j \triangleleft V_{n-1} \in \mathfrak{F}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что $H_i K_j \triangleleft V \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $H_i K_j \triangleleft V$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в группе MN . Допустим противное, т.е. $H_i K_j \triangleleft V \subset T \subset V$ и $T \in \mathfrak{F}$. Теперь из условий $T \cap M \triangleleft T$ и $T \in \mathfrak{F}$ получим, что $T \cap M \subseteq H_i$. Значит, $T \cap M \subseteq H_i \cap V$. Аналогично показываем, что $T \cap N \subseteq K_j \cap N$. Следовательно, $(T \cap M)(T \cap N) \subseteq (H_i \cap V)(K_j \cap V)$. Далее из предположения $H_i K_j \triangleleft V \subset T$ следует, что $(H_i \cap V)(K_j \cap V) \subseteq (T \cap M)(T \cap N)$. Отсюда следует равенство: $(H_i \cap V)(K_j \cap V) = (T \cap M)(T \cap N)$. Допустим, что $H_i K_j \triangleleft V \subset (T \cap M)(T \cap N) = (H_i \cap V)(K_j \cap V)$. Но т.к. $(H_i \cap V)(K_j \cap V) \subseteq H_i K_j \triangleleft V$, то получаем противоречие. Значит, $H_i K_j \triangleleft V \supseteq (T \cap M)(T \cap N) = T$. Последнее противоречит предположению о включении $H_i K_j \triangleleft V \subset T$. Итак, $H_i K_j \triangleleft V$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в группе V . Значит, $H_i K_j$ является $\mathfrak{F}$ -инъектором группы MN . Поскольку, кроме того, выше доказали, что $H_i K_j \triangleleft MN$, то и получаем, что $MN \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Теорема доказана.

Лемма 1.8. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\text{Ext } \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, F – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G , $N \triangleleft G$, $N \in \mathfrak{F}$. Тогда FN/N есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G/N .

Доказательство. Пусть V/N – достижимая подгруппа группы G/N . Используем очевидное равенство: $V/N \cap FN/N = N(V \cap F)/N$. Допустим, что $N(V \cap F)/N \subset K/N \subset G/N$ и $K/N \in \mathfrak{F}$. Ясно, что V – достижимая в группе G . Тогда $V \cap F$ – $\mathfrak{F}$ -максимальная в группе G . Из вышеприведенного включения получаем:

$V \cap F \subseteq K \subseteq G$, а из включения $K/N \in \mathfrak{F}$ получим, что $K \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $\mathfrak{F}$ -максимальностью подгруппы $V \cap F$ в группе G . Лемма доказана.

Определение. Подгруппа N группы G называется $\mathfrak{F}$ -достижимой в группе G , если для каждого $\mathfrak{F}$ -инъектора F группы G пересечение $N \cap F$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в группе N .

В силу теоремы 1.4 ясно, что каждая достижимая подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппой группы G .

Лемма 1.9. Пусть все максимальные подгруппы разрешимой группы G являются $\mathfrak{F}$ -достижимыми в группе G . Тогда $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G – нормальная подгруппа в G .

Доказательство. Пусть F – произвольный $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Допустим, что F не является нормальной подгруппой в G . Тогда $N_G(F) \neq G$. Значит, существует максимальная подгруппа M в группе G такая, что $M \supseteq N_G(F)$. Отсюда следует, что $M \supseteq F$. По условию M есть $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G . Значит, $M \cap F$ – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы M . Поскольку $F \subseteq M$, то F есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы M . Далее, пусть x – произвольный элемент группы G . Тогда F^x есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Следовательно, $M \cap F^x$ – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы M . Тогда в силу теоремы 2.2 [9] получаем, что существует такой элемент m из M , что $F^m = M \cap F^x$.

Отсюда: $F^m = F^x$. Значит, $F^x \subseteq M$ и $F \subseteq M^y$, где $y = x^{-1}$. Последнее включение справедливо для любого элемента x из M . Значит, $F \subseteq M_G$. Теперь, с учетом леммы 1.2, получаем соотношение: $G = M_G N_G(F) \subseteq M_G M = M$. Получили очевидное противоречие. Теорема доказана.

Будем в дальнейшем символом $\mathfrak{F}$ обозначать локальную формацию Фиттинга (т.е. $\mathfrak{F}$ одновременно локальная формация и класс Фиттинга).

Теорема 1.10. Пусть $\text{Ext}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{A}$ и пусть F – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G , $N \triangleleft G$ и все максимальные подгруппы разрешимой группы G являются $\mathfrak{F}$ -достижимыми в G . Тогда FN/N есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G/N .

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то теорема выполняется тривиально. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Предположим, что FN/N не является $\mathfrak{F}$ -инъектором группы G . Очевидно, что $FN/N \in \mathfrak{F}$. С учетом леммы 1.9 имеем, что $F \triangleleft G$. Возьмем R/N – $\mathfrak{F}$ -инъектор в G/N . Так как $FN/N \triangleleft G/N$, то $FN/N \cap RN$ есть $\mathfrak{F}$ -максимальная в FN/N . Учитывая включение $FN/N \in \mathfrak{F}$, получим, что $(FN/N) \cap (R/N) = FN/N$. Тогда $FN/N \subseteq R/N$. Пусть R_G – ядро подгруппы R в группе G . Ясно, что $F \subseteq R_G$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1) $R \subset G$. Если теперь допустить, что $R \in \mathfrak{F}$, то $F = R$ и из равенства $FN/N = R/N$ получаем требуемое утверждение. Полагаем теперь, что $R \notin \mathfrak{F}$. Поскольку $|R| < |G|$, то по индукции для R теорема выполняется: FN/N есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы R/N . Но $R/N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $FN/N = R/N$.

2) $R = G$. Допустим, что $F = R_G$. Тогда R/F является R -главным фактором и, кроме того, нефраттиниевым $\mathfrak{F}$ -эксцентральным. Значит, существует максимальная $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа S в группе G , ($S \neq G$), которая дополняет фактор R/F в группе R , т.е. $SF = R$, $S \cap R = F$. Кроме того, $SR^* = R$. Но $R^* \subseteq R_G = F \subseteq S$. Отсюда получаем, что $S = R$. Противоречие. Полагаем теперь, что

$$F \subset R_G. \quad (1.1)$$

В силу того, что F является $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной подгруппой в группе R , все максимальные $\mathfrak{F}$ -абнормальные подгруппы группы R покрывают R -главные факторы от 1 до F . Отсюда получаем, что $F \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(R)$. Теперь с применением теоремы 1 из [10] получаем, что $\Delta^{\mathfrak{F}}(R) \in F$. Следовательно,

$$F = \Delta^{\mathfrak{F}}(R). \quad (1.2)$$

2.1) Допустим, что N – минимальная нормальная подгруппа в G . Поскольку $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $G^* = N$ – минимальная нормальная подгруппа в G и т.к. G – разрешима, то G^* – абелева группа. Теперь в силу теоремы 21.10 [4] получаем, что все дополнения к G^* в G являются $\mathfrak{F}$ -нормализаторами и, кроме того, ясно, что эти дополнения есть максимальные $\mathfrak{F}$ -абнормальные подгруппы в G . Пусть M – максимальная $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа в G . Тогда M есть $\mathfrak{F}$ -нормализатор в G . Значит, $M \in \mathfrak{F}$. С учетом (2) видно, что F есть максимальная $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа в G . Отсюда получаем, что $FN = G$. Значит, $FN = R$ и поэтому $FN/N = R/N$.

2.2) Пусть теперь N – не минимальная нормальная подгруппа в G . Возьмем G – главный фактор N/N_1 . Тогда, с учетом изоморфизма $(G/N_1)/(N/N_1) \cong G/N$, условий $N/N_1 \in \mathfrak{F}$, $G/N \in \mathfrak{F}$ и условий теоремы, получим, что $G/N_1 \in \mathfrak{F}$. Если N_1 – минимальная нормальная подгруппа в G , то рассуждения проводим аналогично пункту 2.1. Пусть N_1 не является минимальной нормальной подгруппой в G . Возьмем G – главный фактор N_1/N_2 . Ясно, что $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Далее рассуждаем аналогично вышеприведенному. Наконец, возьмем главный фактор N_{k-1}/N_k , где N_k – минимальная нормальная подгруппа в G ($k \geq 1$. Если $k = 1$, то $N_{k-1} = N$), $G/N_k \in \mathfrak{F}$. Все дополнения M к подгруппе N_k в G являются максимальными $\mathfrak{F}$ -абнормальными подгруппами в G и, очевидно, $M \in \mathfrak{F}$. В силу (1.2) теперь ясно, что $F = M$ и поэтому M нормальна в G . Отсюда: $F = R_G$.

Последнее равенство противоречит формуле (1.1). Теорема доказана.

2. Определение. Определим подгруппу $\Phi_F(G)$, как пересечение всех $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп группы G . Если множество $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп группы G пустое, то полагаем, что $\Phi_F(G) = G$.

Следующая теорема представляет собой условия инвариантности $\mathfrak{F}$ -инъекторов подгрупп конечных групп.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{A}$, $\text{Ext}_F \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, $A \subseteq G$ и пусть для любой максимальной подгруппы M группы G , которая содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G , справедливо: либо $A \cap M \subseteq \Phi_F(A)$, либо $A \subseteq M$. Тогда $A \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_n$ – все те максимальные подгруппы группы G , которые содержат $\mathfrak{F}$ -инъекторы группы G .

Допустим, что $A_G \neq 1$. Возьмем L -минимальную нормальную подгруппу в G такую, что $L \subseteq A$. Если $A \subseteq M_r$, то $A/L \subseteq M_r/L$. Если же $A \cap M_r \subseteq \Phi_F(A)$, то справедливо:

$$(A \cap M_r)L/L \subseteq \Phi_F(A)L/L.$$

Из определения групп $\Phi_F(A)$ и $\Phi_F(A/L)$ следуют включения:

$$(A \cap M_r)L/L \subseteq \Phi_F(A)L/L \subseteq \Phi_F(A/L).$$

Кроме того ясно, что G/L не принадлежит $\mathfrak{F}$. В силу индуктивных соображений получим, что $R/L < A/L$. Следовательно:

$$R < A \quad (2.1)$$

Пусть F – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы A . Тогда, учитывая (2.1) и лемму 1.3, получим, что $R \cap F$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы R . Так как $R \in \mathfrak{F}$, то $R \cap F = R$. Отсюда получим:

$$R \subseteq F \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2), получим, что $R/N \subseteq F/N$. Но R/N – это $\mathfrak{F}$ -инъектор и $F/N \in \mathfrak{F}$. Значит, $R/N = F/N$. Следовательно, $R = F$. В силу (2.1) получим, что $F < A$. Полагаем, что $A_G = 1$.

Предположим, что $D_G \neq 1$ и пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G , $N \subseteq D$, где D есть $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Допустим, что $D = N$. Если

существует в G минимальная нормальная подгруппа K и $K \neq N$, то во-первых, $N \cap K = 1$, а во-вторых, $N \cap K$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в N (по лемме 1.3). Отсюда получаем, что 1 есть $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в N . Значит, N не принадлежит $\mathfrak{F}$. Но $N \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Полагаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . По лемме 1.8 имеем, что $DN / N = N / N$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в G / N . Тогда $\mathfrak{F}$ -нормализатор в группе G / N есть единичная подгруппа. Далее, используя свойства $\mathfrak{F}$ -нормализатора группы G / N (следствие 21.1.1 из [4]), получим: $(N / N) (G / N)^* = G^* / N = G / N$. Т.к. теперь ясно, что $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G / N есть единичная подгруппа в G / N , то все (G / N) – главные факторы между N / N и G / N изолируются $\mathfrak{F}$ -нормализатором группы G / N . Если теперь допустить, что N есть $\mathfrak{F}$ -центральный G -главный фактор, то, учитывая равенство $N = C_G(N)$, получим: $G / N \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Полагаем, что N есть $\mathfrak{F}$ -эксцентральный G -главный фактор. Тогда получаем, что в G -главном ряду между 1 и G все факторы $\mathfrak{F}$ -эксцентральные. Значит, $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G равен 1 . Применяя теорему 21.3 из [4] (с учетом включения $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$), получаем, что 1 есть $\mathfrak{X}$ -нормализатор группы G . По теореме 21.12 из [4] нормализатор силовой системы группы G равен 1 . А по теореме 21.13 пункт 3 из [4] подгруппа U , порожденная силовой системой, совпадает с G . Но так как $U = 1$, то $G = 1$. Противоречие.

Итак, считаем в дальнейшем, что $N \subset D$. Теперь (с учетом того, что $D \subseteq M_i$) имеем включение $N \subseteq M_i$. Тогда $M_i / N \supseteq D / N$. Далее, имеем включения: $(AN / N) \cap (M_i / N) = (M_i \cap A) N / N \subseteq \Phi_F(A) N / N \subseteq \Phi_F(A / N)$. В силу индуктивных соображений получим, что $R / N \triangleleft AN / N$ (здесь R / N по-прежнему $\mathfrak{F}$ -инъектор группы AN / N). Отсюда:

$$R \triangleleft AN. \quad (2.3)$$

Далее, по теореме 1.7 (при $p = 1$) получим, что $AN / N \in \mathfrak{B}$. Тогда имеем:

$$A / A \cap N \in \mathfrak{B} \quad (2.4)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи. Если $N \subseteq A$, то получим противоречие с $A_G = 1$. Если $A \cap N = 1$, то из (2.4) получим, что $F \triangleleft A$. Полагаем теперь, что $A \cap N \neq 1$, $N \not\subseteq A$. Так как $A \cap N \triangleleft A$, то (с применением леммы 1.3) $A \cap N \cap F$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в $A \cap N$. Но $A \cap N \in \mathfrak{F}$. Значит, $A \cap N \cap F = A \cap N$. Поскольку $F \subseteq A$, то получаем:

$$F \cap N = A \cap N. \quad (2.5)$$

Возьмем $\mathfrak{F}$ -инъектор $Q / F \cap N$ группы $A / A \cap N$. Тогда $Q / F \cap N \triangleleft A / A \cap N$ в силу (2.4). Следовательно,

$$Q \triangleleft A. \quad (2.6)$$

Применяя теперь лемму 1.8, получим, что $F(A \cap N) / A \cap N$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в группе $A / A \cap N$. Теперь в силу (2.5) имеем, что $A \cap N \subseteq F$. Тогда $F / A \cap N$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в группе $A / A \cap N$. Отсюда получим: $F^* = Q$, $x \in A$. В силу (2.6) теперь получаем, что $F^* \triangleleft A$. Значит, $F \triangleleft A$.

Считаем теперь, что $D_G = 1$. Тогда N не входит в D . Теперь в силу того, что $D \cap N$ есть $\mathfrak{F}$ -инъектор в группе N и $N \in \mathfrak{F}$, получим: либо $D \cap N = N$, либо $D \cap N = 1$. Если $D \cap N = N$, то $N \subseteq D$, а это противоречит $D_G = 1$. Пусть $D \cap N = 1$. Тогда D – максимальная подгруппа в G . Пусть $D = M_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда $M_i \in \mathfrak{F}$. Теперь из G -изоморфизма $M_i \cong M_i / M_i \cap N \cong G / N$ получим, что $G / N \in \mathfrak{F}$. Но $N \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. В силу условия теоремы получим, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2.2 [2]. Пусть H – подгруппа конечной разрешимой группы G и пусть для любой максимальной подгруппы M из G , индекс которой в G есть степень простого p , либо $H \cap M \subseteq \Phi_p(H)$, либо $H \subseteq M$. Тогда H – p -нильпотентна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bauman, Steven.** The intersection map of subgroups / Steven Bauman // Arch. Math. – 1974. – V. 25. – № 4. – P. 337-340.
2. **Kramer, O.U.** Über Durchschnitte von Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / O.U. Kramer // Math. Z. – 1976. – 148. – № 1. – S. 89-97.
3. **Fischer, B.** Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – 102. – № 5. – S. 337-339.
4. **Шеметков, Л.А.** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
5. **Гойко, В.И.** Характеристические классы подсистем конечных алгебраических систем / В.И. Гойко. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2005. – 161 с.
6. **Vorob'ev, N.T.** Gaschutz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorob'ev // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 155-166.
7. **Shemetkov, L.A.** Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф.Скорины. – Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 186-187.
8. **Шеметков, Л.А.** Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5-13.
9. **Шеметков, Л.А.** О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 207-212.
10. **Селькин, М.В.** О влиянии максимальных подгрупп на формационное строение конечных групп / М.В. Селькин // Конечные группы. – Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 151-163.
11. **Doerk, K.** Finite soluble groups / K. Doerk, T.O. Hawkes / Walter de Gruyter. Berlin.-New-York, 1992.