УДК 519.8

Н.М. ЛЕЩЕНКО, Ю.Н. СОТСКОВ

УПОРЯДОЧЕНИЕ КОНФЛИКТНЫХ ТРЕБОВАНИЙ В ПРОЦЕССЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

Введение

Рассматривается задача минимизации общего времени обслуживания n требований в поточной системе, состоящей из двух приборов. Предполагается, что длительности операций являются случайными величинами, для каждой из которых известны только верхние и нижние границы возможных значений. В связи с неопределенностью длительностей операций процесс решения задачи разбивается на несколько этапов. На *предварительном этапе* на основании анализа условий Джонсона устанавливается строгий (частичный) порядок на множестве n требований, определяющий минимальное по включению множество доминирующих перестановок. Затем анализируются достаточные условия, позволяющие сократить мощность построенного множества расписаний, в результате дополнительного упорядочения требований до начала их обслуживания. Если после проверки достаточных условий не удается выделить единственную перестановку, оптимальную для всех возможных реализаций длительностей операций, то в работе предлагается перейти к *оперативному этапу* решения задачи, когда некоторые требования будут уже обслужены и соответственно часть оптимального расписания будет реализована. Для оперативного этапа решения задачи рассматриваются две различные постановки. В первой постановке (*задача A*) предполагается, что к моменту начала обслуживания требования становятся известными точные значения длительностей операций по его обслуживанию каждым из двух приборов. Во второй постановке (*задача B*) точное значение длительности операции становится известным только в момент завершения ее выполнения. Для обеих постановок задачи получены достаточные условия, позволяющие в ряде случаев выделить единственную оптимальную перестановку обслуживания n требований. Дальнейшее изложение результатов организовано следующим образом. Вначале приведена постановка задачи и основные понятия. Затем приводятся достаточные условия определения оптимальной перестановки на оперативном этапе и аналогичные утверждения для предварительного этапа решения задачи. Приводится пример, иллюстрирующий различные этапы решения задачи. В заключении рассматриваются перспективы дальнейших исследований.

Предварительный этап решения задачи

Рассмотрим обслуживающую систему, состоящую из двух приборов $m \in M = \{1,2\}$ и n требований $j \in J = \{1,2,...,n\}$. Технологические маршруты обслуживания требований одинаковы: каждое требование вначале обслуживается прибором 1, затем прибором 2. Все требования готовы к обслуживанию в момент времени $\tau = 0$. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования, и каждое требование может обслуживаться одновременно не более чем одним прибором. Процесс обслуживания требования $j \in J$ прибором $m \in M$ будем называть *операцией* и обозначать O_{jm}. Прерывания выполнения операции запрещены. Предполагается, что длительность t_{jm} операции O_{jm} заранее не фиксирована и может принимать в процессе ее выполнения любое действительное значение между заданными нижней границей t_{jm}^L и верхней границей t_{jm}^U $(0 \le t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U)$, причем нет достаточных оснований заранее полагать, что случайная величина t_{jm} подчиняется какому-либо закону распределения вероятностей. В задаче требуется минимизировать общее время $C_{\max}(\pi)$ обслуживания требований при расписании π. Будем обозначать такую задачу $F2 \,|\, t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \,|\, C_{\max}$.

Рассмотрим множество Δ векторов $t = (t_{11}, t_{12}, ..., t_{n1}, t_{n2})$ длительностей операций, такое, что $\Delta = \{t \,|\, t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U, j \in J, m \in M\}$. Вектор t является *допустимым вектором длительностей операций*, если $t \in \Delta$.

В отличие от задачи $F2 \,|\, t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \,|\, C_{\max}$ со случайными длительностями операций, в детерминированной постановке задачи (обозначаемой $F2 \,||\, C_{\max}$) длительности операций t_{jm} заранее фиксированы. В работе Джонсона [1] показано, что для задачи $F2 \,||\, C_{\max}$ *перестановочные расписания*, при которых оба прибора обслуживают требования в одном и том же порядке, доминируют все остальные расписания (расписание π_1 *доминирует* расписание π_2, если $C_{\max}(\pi_1) \le C_{\max}(\pi_2)$). Поскольку для каждого вектора длительностей операций $t \in \Delta$ задача $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$ превращается в задачу $F2 \| C_{\max}$, то и для всех допустимых векторов длительностей операций достаточно искать оптимальное расписание задачи $F2 \| C_{\max}$ среди перестановочных расписаний. Поэтому при решении задачи $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$ можно ограничиться исследованием только перестановочных расписаний.

Для каждой операции O_{jm} через $t_{jm}^0(\pi)$ и $\bar{t}_{jm}(\pi)$ будем обозначать соответственно момент наиболее раннего начала и завершения этой операции при расписании, заданном перестановкой π. Здесь и далее рассматриваются только активные расписания (расписание называется *активным*, если ни одна операция не может быть начата раньше без задержки начала выполнения хотя бы одной операции и без нарушения принятого в данном расписании порядка выполнения операций каким-либо прибором). В частности, при активном расписании π для требования $j_1 \in J$, обслуживаемого первым, выполняется равенство $t_{j_1 1}^0(\pi) = 0$, а для требования $j_i \in J$, обслуживаемого *i*-м по порядку, выполняется равенство $t_{j_i 1}^0(\pi) = \sum_{k=1}^{i-1} t_{j_k 1}$. Поскольку каждая перестановка n требований для каждого допустимого вектора длительностей операций определяет единственное активное перестановочное расписание, то в дальнейшем будем отождествлять понятия перестановки и расписания. Множество всех *n*! перестановок *n* требований обозначим через *S*. В работе [1] приведен следующий полиномиальный алгоритм (*алгоритм Джонсона*) построения оптимальной перестановки для задачи $F2 \| C_{\max}$.

Разделим все множество требований *J* на два непересекающихся подмножества N_1 и N_2 таким образом, что множество N_1 содержит требования, для которых $t_{j1} \le t_{j2}$, а множество N_2 содержит требования, для которых $t_{j1} > t_{j2}$. Оптимальное обслуживание n требований может быть реализовано следующим образом. Вначале обслуживаются требования множества N_1 в порядке неубывания длительностей операций по обслуживанию требований первым прибором, затем обслуживаются требования множества N_2 в порядке невозрастания длительностей операций по обслуживанию требований вторым прибором. Перестановку, построенную при помощи алгоритма Джонсона, будем называть *перестановкой Джонсона*. Следует отметить, что оптимальное расписание для задачи $F2 \| C_{\max}$ может определяться также перестановкой, которая не является перестановкой Джонсона.

Рассмотрим *предварительный этап* решения задачи $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$. Для задачи со случайными длительностями операций может не существовать единственной перестановки, которая остается оптимальной перестановкой для всех векторов $t \in \Delta$. Поэтому будем искать минимальное по включению множество *S** доминирующих перестановок, такое, что для любого допустимого вектора длительностей операций множество *S** содержит хотя бы одну перестановку

Джонсона для задачи $F2\|C_{\max}$ с вектором длительностей операций t. Такой подход к решению задачи с неопределенными числовыми параметрами был предложен в работе [2], в которой множество S^* названо *решением* задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$ (на предварительном этапе).

Введем на множестве J отношение строгого порядка $\to$ (антирефлексивное, асимметричное и транзитивное). Рассмотрим два требования $u \in J$ и $v \in J$. Если для каждого вектора $t \in \Delta$ существует перестановка Джонсона, в которой требование u обслуживается раньше требования v (т. е. существует перестановка Джонсона вида $\pi = (s_1, u, s_2, v, s_3) \in S$), то будем говорить, что *можно зафиксировать оптимальный порядок* $u \to v$ *обслуживания требований* u и v. Построение множества S^* можно реализовать на основе следующей теоремы, доказанной в работе [3].

Теорема. *Для того, чтобы можно было зафиксировать оптимальный порядок обслуживания требований u и v, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих трех условий:*

$$t_{v2}^U \le t_{v1}^L \text{ и } t_{u1}^U \le t_{u2}^L; \quad t_{u1}^U \le t_{v1}^L \text{ и } t_{u1}^U \le t_{u2}^L; \quad t_{v2}^U \le t_{v1}^L \text{ и } t_{v2}^U \le t_{u2}^L.$$

Для построения множества S^* будем исключать из множества S заведомо "лишние" перестановки (исключая различные перестановки, можно построить различные множества S^*). Если можно зафиксировать оптимальный порядок $u \to v$ обслуживания требований u и v (т. е. для этих требований выполняются условия теоремы), то из множества S будем удалять все перестановки с противоположным порядком обслуживания этих требований. Если условия теоремы не выполняются для порядка обслуживания двух требований, то следует проверить выполнимость этих условий для противоположного порядка $v \to u$. Если соответствующие условия снова не выполняются, требования u и v будем называть конфликтными. Тогда во множество S^* следует включить хотя бы одну перестановку вида $\pi_u = (s_1, u, s_2, v, s_3) \in S$ и хотя бы одну перестановку вида $\pi_v = (s_1, v, s_2, u, s_3) \in S$. Очевидно, что различные перестановки множества S^* отличаются только порядком обслуживания конфликтных требований.

Таким образом, после проверки выполнения условий теоремы для всех пар требований множества J, будет построено множество S^*. Если оно содержит единственную перестановку, т. е. в результате применения теоремы все требования множества J оказались линейно упорядоченными, то нет необходимости в последующих этапах решения задачи. Если же $|S^*| \ge 2$ (и следовательно, существуют конфликтные требования), то решение задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$ может быть получено на последующих этапах.

Определение оптимального расписания на оперативном этапе

Рассмотрим случай, когда существует только два конфликтных требования, причем они не располагаются в начале перестановок множества S^* (случай двух конфликтных требований, расположенных первыми в перестановках множества S^*, рассмотрен в статье [5]). В этом случае множество S^* содержит две перестановки, отличающиеся только порядком обслуживания двух конфликтных требований ($|S^*| = 2$). Не нарушая общности, предположим, что это перестановки $\pi_u = (j_1, \ldots, j_{i-1}, j_i, j_{i+1}, j_{i+2}, \ldots, j_n)$ и $\pi_v = (j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, j_i, j_{i+2}, \ldots, j_n)$.

Для практической реализации оптимального расписания необходимо выбрать единственную перестановку, и, следовательно, необходимо упорядочить оптимальным образом конфликтные требования. Рассмотрим *оперативный этап* решения задачи, заключающийся в том, что уже реализована начальная часть оптимального расписания вплоть до начала обслуживания конфликтных требований.

Рассмотрим вначале *задачу А*. Пусть к моменту времени $\tau > 0$ прибором 1 начато и завершено обслуживание требований $(j_1, j_2, ..., j_{i-1})$ в порядке, общем для обеих перестановок π_u и π_v из множества S^*. Будем предполагать, что к этому моменту времени известна начальная часть $(t_{11}, t_{12}, ..., t_{i-1,1}, t_{i-1,2})$ вектора длительностей операций. В момент времени $\tau = \bar{t}_{i-1,1}(\pi_u) = \bar{t}_{i-1,1}(\pi_v) = \sum_{k=1}^{i-1} t_{k1}$ необходимо упорядочить требования j_i и j_{i+1} с учетом дополнительной информации о длительностях операций, выполненных к этому моменту. В момент времени τ известно точное значение величины $c_1 = \bar{t}_{i-1,1}(\pi_u) = \bar{t}_{i-1,1}(\pi_v) = \tau$. Дополнительно будем предполагать, что в момент времени известна и величина $c_2 = \bar{t}_{i-1,2}(\pi_u) = \bar{t}_{i-1,2}(\pi_v)$.

Определим, при какой перестановке, π_u или π_v, прибор 2 может начать раньше выполнение операции $O_{i+2,2}$. Началом выполнения операции $O_{i+2,2}$ при расписании π_u служит величина $t^0_{i+2,2}(\pi_u) = \max\{\bar{t}_{i+2,1}(\pi_u), \bar{t}_{i+1,2}(\pi_u)\}$, а при расписании π_v – величина $t^0_{i+2,2}(\pi_v) = \max\{\bar{t}_{i+2,1}(\pi_v), \bar{t}_{i2}(\pi_v)\}$. Как при расписании π_u, так и при расписании π_v прибор 1 обслуживает все требования без простоев и, следовательно, для операции $O_{i+2,1}$ справедливы равенства:

$$\bar{t}_{i+2,1}(\pi_u) = c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} + t_{i+2,1} = c_1 + t_{i+1,1} + t_{i1} + t_{i+2,1} = \bar{t}_{i+2,1}(\pi_v).$$

Обозначим величину $\bar{t}_{i+2,1}(\pi_u) = \bar{t}_{i+2,1}(\pi_v)$ через T_{uv}, а величины $\bar{t}_{i+1,2}(\pi_u)$ и $\bar{t}_{i2}(\pi_v)$ через T_u и T_v, соответственно. Если выполняется равенство $\max\{T_{uv}, T_u\} = T_{uv}$, то величину $t^0_{i+2,2}(\pi_u)$ уменьшить нельзя, поскольку прибор 1 обслуживает требования без простоев. Следовательно, перестановку π_u можно взять в качестве оптимальной перестановки (т. е. в момент времени τ следует начать выполнение операции O_{i1}).

Аналогично, если выполняется равенство $\max\{T_{uv}, T_v\} = T_{uv}$, то в качестве оптимальной перестановки можно взять перестановку π_v. При одновременном выполнении равенств $\max\{T_{uv}, T_u\} = T_u$ и $\max\{T_{uv}, T_v\} = T_v$ необходимо провести сравнение величин T_u и T_v. Рассмотрим, какие при этом могут возникнуть ситуации на приборе 2.

Случай I. Прибор 2 обслуживает требования множества $\{j_{i-1}, j_i, j_{i+1}\}$ без простоев.

Случай II. Прибор 2 при обслуживании требований множества $\{j_{i-1}, j_i, j_{i+1}\}$ простаивает только после обслуживания требования j_{i-1}.

Случай III. Прибор 2 при обслуживании требований множества $\{j_i, j_{i+1}\}$ простаивает между обслуживанием этих требований.

Рассмотрим каждый из этих случаев для перестановки π_u.

• Поскольку в случае I прибор 2 работает без простоев ($\bar{t}_{i+1,2}(\pi_u) = c_2 + t_{i2} + t_{i+1,2}$), то к возможному началу выполнения операций O_{i2} и $O_{i+1,2}$ прибор 1 должен завершить выполнение операций O_{i1} и $O_{i+1,1}$, соответственно (рис. 1). В результате получаем условия: $c_1 + t_{i1} \le c_2$; и $c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} \le c_2 + t_{i2}$.

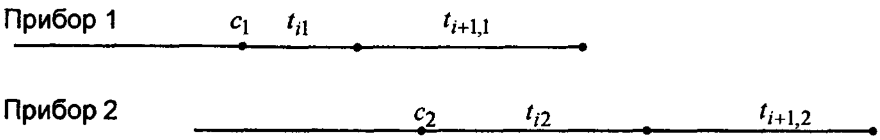

Рис.1. Случай I для перестановки π_u

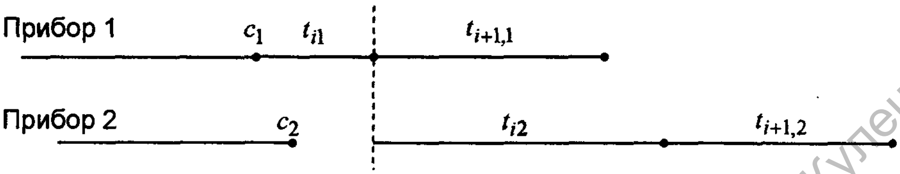

Рис.2. Случай II для перестановки π_u

• В случае II (когда $\bar{t}_{i+1,2}(\pi_u) = c_1 + t_{i1} + t_{i2} + t_{i+1,2}$) к возможному началу выполнения прибором 2 операции O_{i2} прибор 1 еще выполняет операцию O_{i1}, в то время как к возможному началу выполнения операции $O_{i+1,2}$ прибор 1 должен уже завершить выполнение операции $O_{i+1,1}$ (рис. 2). Отсюда получаем следующие условия: $c_1 + t_{i1} \geq c_2$ и $t_{i+1,1} \leq t_{i2}$.

• В случае III (когда $\bar{t}_{i+1,2}(\pi_u) = c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} + t_{i+1,2}$) прибор 2 простаивает перед выполнением операции $O_{i+1,2}$, т. е. $c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} \geq c_2 + t_{i2}$, причем выполняется неравенство $t_{i+1,1} \geq t_{i2}$.

Последнее неравенство обуславливает отличие этой ситуации от предыдущего случая и гарантирует простой прибора 2 между выполнением операций O_{i2} и $O_{i+1,2}$ (после обслуживания требования j_{i-1} прибор 2 может либо простаивать (рис. 3 а)), либо не простаивать (рис. 3 б)).

Итак, в случае I прибор 2 обслуживает требования множества $\{j_{i-1}, j_i, j_{i+1}\}$ без простоев, и, следовательно, величину $t^0_{i+2,2}$ уменьшить нельзя. Перестановку, для которой имеет место случай I, можно взять в качестве оптимальной. При этом можно не вычислять значения $\max\{T_{uv}, T_u\}$ и $\max\{T_{uv}, T_v\}$, поскольку перестановка π_u (перестановка π_v) будет оптимальной независимо от значений этих величин.

В случае II перестановка π_u является оптимальной, если выполняется равенство $\max\{T_{uv}, T_u\} = T_{uv}$, т. е. $T_{uv} > T_u$:

$$c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} + t_{i+2,1} \geq c_1 + t_{i1} + t_{i2} + t_{i+1,2}.$$

Получаем неравенство $t_{i+1,1} + t_{i+2,1} \geq t_{i2} + t_{i+1,2}$.

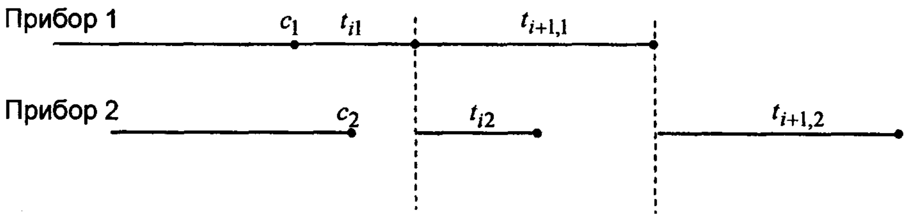

Рис.3(а). Случай III для перестановки π_u

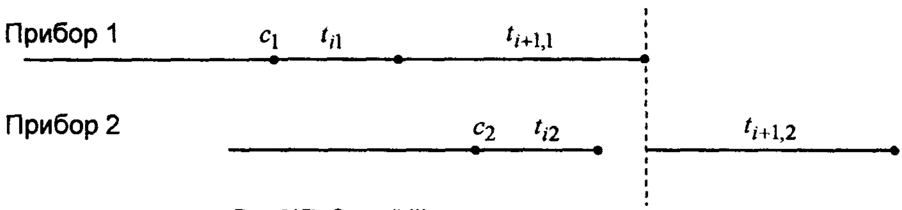

Рис.3(б). Случай III для перестановки π_u

В случае III аналогично получаем неравенство

$$c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} + t_{i+2,1} \ge c_1 + t_{i1} + t_{i+1,1} + t_{i+1,2},$$

из которого следует неравенство $t_{i+2,1} \ge t_{i+1,2}$.

Если же в случаях II и III для величины T_u выполняется равенство $\max\{T_{uv}, T_u\} = T_u$, то нужно проводить исследование перестановки π_v (соответствующие неравенства для перестановки π_v можно получить аналогичным образом). Если для перестановки π_v не имеет места случай I или не выполняется неравенство $\max\{T_{uv}, T_v\} = T_{uv}$, то следует сравнивать величины T_u и T_v. Однако, проводя сравнение величин T_u и T_v для всех возможных сочетаний случаев II и III, нетрудно доказать, что при этом невозможно заранее выбрать единственную оптимальную перестановку.

Достаточные условия оптимальности перестановки

Для получения достаточных условий для оперативного этапа решения задачи следует вместо неизвестных точных значений длительностей операций взять их верхние и нижние оценки таким образом, чтобы сохранить знак неравенства. В результате нетрудно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. *Обе перестановки π_u и π_v являются оптимальными, если выполняется неравенство* $c_1 + t_{i1}^U + t_{i+1,1}^U \le c_2$.

Лемма 2. *Перестановка π_u является оптимальной, если выполняются неравенства:* $c_1 + t_{i1}^U \le c_2$ *и* $c_1 + t_{i1}^U + t_{i+1,1}^U \le c_2 + t_{i2}^L$.

Лемма 3. *Перестановка π_u является оптимальной, если выполняются неравенства:* $c_1 + t_{i1}^L \ge c_2$, $t_{i+1,1}^U \le t_{i2}^L$ *и* $t_{i+1,1}^L + t_{i+2,1}^L \ge t_{i2}^U + t_{i+1,2}^U$.

Лемма 4. *Перестановка π_u является оптимальной, если выполняются неравенства:* $c_1 + t_{i1}^L + t_{i+1,1}^L \ge c_2 + t_{i2}^U$, $t_{i+1,1}^L \ge t_{i2}^U$ *и* $t_{i+2,1}^L \ge t_{i+1,2}^U$.

Соответствующие достаточные условия оптимальности перестановки π_v можно представить аналогичным образом.

Если не выполняется ни одно из приведенных достаточных условий оптимальности перестановки π_u и аналогичных условий для оптимальности перестановки π_v, а также при сочетании случаев II и III для величин T_u и T_v, можно отдать предпочтение одному из конкурирующих расписаний π_u или π_v на основании некоторых дополнительных соглашений. Например, можно выбирать такое расписание, которое гарантирует наименьший проигрыш для оптимального значения $C_{\max}(\pi)$ в наихудшем из возможных случаев.

Аналогично достаточные условия выделения единственной оптимальной перестановки можно получить, если рассматривать *задачу B*, для которой в момент времени $\tau = \bar{t}_{i-1,1}(\pi_u)$ известна только величина c_1 и длительности операций на обоих приборах, выполнение которых завершено к моменту времени τ. В отличие от рассмотренной выше *задачи А*, величина c_2 в *задаче В* предполагается неизвестной.

Оценим снизу величину c_2 в момент времени τ. Пусть в этот момент времени прибор 2 выполняет обслуживание требования j_k, $1 \le k \le i-1$. Тогда точную оценку снизу $\underline{c}_2$ величины c_2 в момент времени τ можно найти по следующей формуле

$$\underline{c}_2 = \max\left\{c_1, t_{k2}^0(\pi_u) + t_{k2}^L\right\} + \sum_{l=k+1}^{i-1} t_{l2}^L.$$

При использовании значения $\underline{c}_2$ вместо значения c_2, получаем следующее утверждение, аналогичное лемме 2.

Лемма 2'. *Если выполняются условия* $c_1 + t_{i1}^U + t_{i+1,1}^U \le \underline{c}_2 + t_{i2}^L$ *и* $c_1 + t_{i1}^U \le \underline{c}_2$, *то перестановка* π_u *является оптимальной для любой допустимой реализации длительностей операций.*

Утверждения, соответствующие леммам 1, 3 и 4, можно получить аналогичным образом и для задачи *В* (в дальнейшем будем называть их леммами 1', 3' и 4' соответственно).

Рассмотрим также предварительный этап решения задачи, когда выделение единственной оптимальной перестановки необходимо провести до начала реализации расписания. Поскольку в этом случае неизвестны значения c_1 и c_2, найдем точную оценку снизу разности $c_2 - c_1$ (этой оценки достаточно для модификации полученных выше утверждений). Обозначим величину $\underline{c}_2 - c_1$ через δ_{i-1}. Как и в работе [4], разобьем множество *J* на три подмножества $J = N_a \cup N_b \cup N^*$ ($N_a \subseteq N_1$, $N_b \subseteq N_2$) так, что требование $j_k \in J$ принадлежит множеству N_a, N_b или N^*, если выполняются соотношения $t_{k1}^U \le t_{k2}^L$, $t_{k2}^U \le t_{k1}^L$ или $\max\left\{t_{k1}^L, t_{k2}^L\right\} < \min\left\{t_{k1}^U, t_{k2}^U\right\}$ соответственно.

Пусть $|N_b| = l$. В случае, когда $n - l \ge i+1$, требования $(j_1, j_2, ..., j_{i-1})$ принадлежат множеству N_a. Следовательно, для каждого из них выполняется соотношение $t_{k1}^U \le t_{k2}^L$, откуда получаем $t_{k2} - t_{k1} \ge t_{k2}^L - t_{k1}^U \ge 0$. Для разности $c_2 - c_1$ получаем неравенства:

$$c_2 - c_1 \ge \sum_{k=1}^{i-1}(t_{k2} - t_{k1}) + t_{11} \ge \sum_{k=1}^{i-1}(t_{k2}^L - t_{k1}^U) + t_{11}^L,$$

откуда следует равенство $\delta_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} t_{k2}^L - t_{k1}^U + t_{11}^L$.

В случае, когда $n - l < i+1$, вычисление δ_{i-1} проводится по рекуррентной формуле. Пусть $|N_a| = p$, тогда $\delta_p = \sum_{k=1}^{p} t_{k2}^L - t_{k1}^U + t_{11}^L$. Для всех индексов $k \in \{p+1, \quad p+2, \quad ..., \quad i-1\}$ выполняется следующее рекуррентное соотношение: $\delta_k = \max\left\{t_{k2}^L, \quad \delta_{k-1} + t_{k2}^L - t_{k1}^U\right\}$. Применяя полученную оценку, утверждение, аналогичное лемме 2, можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2". *Если выполняются условия* $\delta_{i-1}+t_{i2}^{L}\geq t_{i1}^{U}+t_{i+1,1}^{U}$ *и* $\delta_{i-1}\geq t_{i1}^{U}$, *то перестановка* π_u *является оптимальной для любой допустимой реализации длительностей операций.*

Достаточные условия для предварительного этапа решения задачи, соответствующие леммам 1, 3 и 4, будем называть леммами 1", 3" и 4" соответственно. Следует отметить, что построенные согласно указанным достаточным условиям перестановки, являясь оптимальными для всех возможных значений длительностей операций, могут не для всех значений длительностей операций быть перестановками Джонсона.

Пример решения задачи $F2\,|\,t_{jm}^{L}\leq t_{jm}\leq t_{jm}^{U}\,|\,C_{\max}$

Полученные результаты могут быть применены и в случае, когда $|S^*|=2^k$ при наличии k последовательных пар конфликтных требований. Для каждой пары конфликтных требований будем проверять выполнение полученных достаточных условий. Условия лемм 1" - 4" проверяются до начала обслуживания требований, причем пары конфликтных требований можно анализировать в произвольном порядке. Если хотя бы для одной пары конфликтных требований выполняются условия одной из лемм 1" - 4", то можно уменьшить мощность множества S^*, упорядочив соответствующим образом конфликтные требования. Если рассматривается оперативный этап, то для упорядочения конфликтных требований применяются леммы 1 - 4 (или леммы 1' - 4', в зависимости от постановки задачи *A* или *B*), причем оптимальное упорядочение конфликтных требований проводится последовательно в порядке их обслуживания в оптимальном расписании. Возможно комбинированное решение задачи, в этом случае частичное упорядочение конфликтных требований проводится до начала обслуживания требований на предварительном этапе. Затем после обслуживания первых требований в оптимальном порядке упорядочиваются остальные требования, если выполняются достаточные условия. Проиллюстрируем вычисления на примере. Пусть два прибора должны обслужить n = 10 требований с одинаковыми маршрутами. Длительность операции t_{jm} может принимать любое действительное значение между нижней и верхней границами, заданными в табл. 1.

После проверки условий теоремы для каждой пары требований можно частично упорядочить множество требований *J*. Графически полученный частичный порядок требований можно изобразить с помощью диаграммы смешанного графа с множеством вершин *J*. При этом дуги указывают ограничения на порядок обслуживания требований, а ребра соединяют пары конфликтных требований (рис. 4).

Таблица 1

Допустимые интервалы длительностей операций

Требования	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8	j_9	j_{10}
t_{i1}^{L}	1	3	3	6	8	9	9	6	6	3
t_{i1}^{U}	2	4	5	7	9	10	10	6	8	5
t_{i2}^{L}	4	5	7	7	7	9	7	3	3	1
t_{i2}^{U}	8	7	9	8	9	11	8	4	3	2

Для рассматриваемого примера получаем включения $j_1 \in N_a$, $j_2 \in N_a$, $j_3 \in N_a$, $j_4 \in N_a$, $j_5 \in N^*$, $j_6 \in N^*$, $j_7 \in N_b$, $j_8 \in N_b$, $j_9 \in N_b$, $j_{10} \in N_b$. Мощность множества S^* равна $\left|S^*\right| = 2^3 = 8$. Шесть требований ($j_2$ и j_3, j_5 и j_6, j_8 и j_9) являются попарно конфликтными.

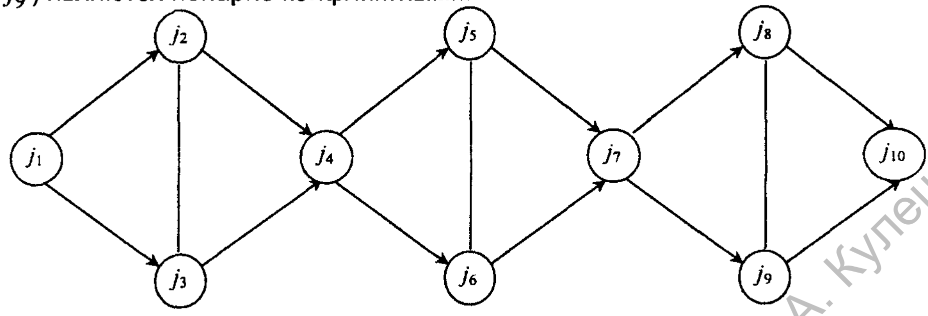

Рис.4. Смешанный граф G

Попытаемся оптимально упорядочить конфликтные требования до начала реализации расписания. Для этого воспользуемся леммами 1" - 4". Для конфликтных требований j_2 и j_3 выполняется условие леммы 2" для порядка требований $j_3 \to j_2$. Для конфликтных требований j_5 и j_6 не выполняются условия лемм 1" - 4" и условия аналогичных лемм для противоположного порядка требований, т. е. требования j_5 и j_6 нельзя упорядочить на предварительном этапе решения задачи. Для требований j_8 и j_9 выполняется условие леммы 4", и оптимальный порядок этих требований: $j_8 \to j_9$.

Таким образом, до начала обслуживания требований упорядочены четыре из шести конфликтных требований. В результате мощность множества S^* уменьшена до двух, и оно содержит перестановки:

$$\pi_u = (j_1, j_3, j_2, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8, j_9, j_{10}), \quad \pi_v = (j_1, j_3, j_2, j_4, j_6, j_5, j_7, j_8, j_9, j_{10}),$$

которые отличаются только порядком обслуживания требований j_5 и j_6. Поскольку порядок требований (j_1, j_3, j_2, j_4) совпадает в обеих перестановках, то можно начать обслуживание этих требований и перейти к решению задачи на оперативном этапе.

Рассмотрим момент времени $\tau > 0$, к которому прибором 1 обслужены требования j_1, j_2, j_3 и j_4 в порядке, общем для обеих перестановок π_u и π_v, и попытаемся упорядочить конфликтные требования j_5 и j_6.

Рассмотрим вначале задачу *A*, т.е. в момент поступления требования на обслуживание становятся известными точные длительности операций по обслуживанию этого требования обоими приборами. Пусть начальная часть вектора длительностей операций на практике оказалась следующей: $(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}, t_{41}, t_{42}) = (1, 8, 3, 7, 3, 9, 6, 8)$. Нетрудно видеть, что выполняется условие леммы 1 и каждую из перестановок π_u и π_v можно взять в качестве оптимальной, т. е. при полученной начальной части вектора длительностей операций порядок требований j_5 и j_6 в оптимальном расписании может быть произвольным.

Рассмотрим теперь задачу *B*, т.е. точное значение длительности операции становится известным только в момент завершения ее выполнения. Убеждаемся, что выполняется условие леммы 2', и, следовательно, перестановка π_u является оптимальной для данной начальной части вектора длительностей операций. При этом длительности остальных операций могут принимать любые допустимые значения. Таким образом, после проверки достаточных условий определено единственное оптимальное расписание.

Заключение

Полученные результаты позволяют в ряде случаев построить оптимальное расписание для задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$ с неопределенными длительностями операций в несколько этапов. Вначале (до момента $\tau = 0$) на основании приведенной теоремы строится смешанный граф, определяющий подмножество S^* множества S, которое для каждого допустимого вектора $t \in \Delta$ длительностей операций содержит хотя бы одну оптимальную перестановку. С помощью лемм 1" - 4", возможно, мощность множества S^* сокращается в результате дополнительного исключения неперспективных перестановок. Затем в момент времени 0 можно начать последовательное выполнение первых линейно упорядоченных операций. В результате реализации части оптимального расписания к моменту времени $\tau > 0$ становятся известными длительности выполненных операций, что может позволить сократить далее мощность множества S^* на основе лемм 1 - 4 или на основе лемм 1' - 4', в зависимости от рассматриваемой постановки задачи *A* или *B*. Таким образом можно решать задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$, в которых множество S^* содержит до $2^{n/2}$ перестановок. Отметим, что условия лемм 1 - 4, 1' - 4', 1" - 4" проверяются за полиномиальное число шагов, что особенно важно при практической реализации оперативного этапа решения задачи.

Если в результате проведенного исследования возникла возможность упорядочить все конфликтные требования, то можно реализовать обслуживание всех требований множества J оптимальным образом. В противном случае (когда для некоторой пары конфликтных требований не выполнено ни одно из полученных достаточных условий) можно определить порядок обслуживания двух конфликтных требований на основе некоторых дополнительных соглашений. В частности, можно выбирать такой порядок конфликтных требований, который гарантирует наименьший проигрыш в наихудшем из возможных случаев. Определение трудоемкости реализации расписания, гарантирующего наименьший проигрыш для оптимального значения $C_{\max}(\pi)$, является интересной задачей для дальнейших исследований.

Исследования могут быть связаны также с обобщением полученных результатов на случай задачи $J2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$ (для многостадийной системы с различными маршрутами обслуживания требований). Кроме того, можно исследовать случай, когда конфликтными являются три и более требований, и получить соответствующие достаточные условия оптимального упорядочения конфликтных требований.

Данная работа выполнена при частичной поддержке Международной федерации ученых (первый автор) и Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь по проекту Ф03МС-039 (второй автор).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Johnson S.M.*** Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistics Quarterly. – 1954. – № 1. – P. 61-68.
2. ***Lai T.-C., Sotskov Yu.N.*** Sequencing with uncertain numerical data for makespan minimization // Journal of the Operational Research Society. – 1999. – № 50. – P. 230-243.
3. ***Лещенко Н.М.*** Минимальное решение для поточной системы обслуживания с неопределенными длительностями операций и критерием минимизации общего времени // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова. – 2004. – № 1. – С. 127-136.
4. ***Лещенко Н.М., Сотсков Ю.Н.*** Оптимальные по быстродействию расписания обслуживания двумя последовательными приборами n требований с неопределенными длительностями операций. – Препринт ОИПИ НАНБ. – 2003. – 40 с.

5. ***Лещенко Н.М., Сотсков Ю.Н.*** Оптимальность перестановки с двумя первыми конфликтными требованиями // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова. – 2004. – № 4.– С. 132-139.

SUMMARY

Two-machine flow-shop scheduling problem minimizing makespan is considered for the case when only lower and upper bounds of job processing times are known before scheduling. Case when minimal set of schedules consists of only two permutations is considered. We propose a new approach for finding an optimal permutation in the realization process of optimal schedule. Sufficient conditions for permutation optimality are proven.