

МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ: ДО И ПОСЛЕ ПРОГРАММЫ ГИЛЬБЕРТА

В математике XX века отразились два взаимодополнительных аспекта, или два ряда проблем: одни из них относятся к тому, чем она является сама по себе, а другие относятся, собственно, к реальной математической деятельности. Современные исследователи философии математики говорят о бесконечности не только как проблеме актуальной и потенциальной бесконечности или проблеме континуума, но и в более широком контексте, как проблеме не-измеримости, не-разрешимости и не-вычислимости.

Активное внедрение вычислительной техники в область математических доказательств потребует осмысления новых подходов к современной математике. Известный математик В.М. Тихомиров по этому поводу пишет: "Существует разрыв между бесконечностью, заложенной в математические понятия (числа, функции, отображения, уравнения и пр.) и практической реализуемостью, которая всегда требует конечного (и притом "небольшого") числа арифметических действий, итераций, шагов алгоритма и т.п. ... Это побуждает к обсуждению проблем оптимальной финитизации – преобразования бесконечного в конечное" [1, с. 177]. Зачастую функции, как решения различных дифференциальных, интегральных, разностных уравнений и их комбинаций, "зашифрованы" в виде задач, а поскольку в большинстве случаев ответ не выражается в конечном виде, то его приближенное выражение, по существу, – это финитизация.

Поэтому Давид Гильберт предполагал, что можно дать финитное обоснование непротиворечивости математических теорий как наиболее достоверное. Но имеет ли "невинное допущение", выражаемое в финитистской точке зрения, ту гносеологическую ценность, на которую претендует? Как показал Курт Гёдель, понятие "доказуемой истины" является более узким, чем понятие "абстрактной истины", восходящей к идее бесконечных проверок. Гносеологический анализ прикладных аспектов математического знания позволяет понять взаимоотношение математического творчества с гёделевским ограничением. Одним из основных источников оснований математического знания является вера в адекватность физической интерпретации формализма, позволяющая постулировать математические истины, недоступные "чистой" интуиции.

Вообще говоря, нет никаких философских оснований предполагать, что ограничения, накладываемые финитизмом Гильберта, столь уж необходимы для исключения вызывающих сомнение элементов математического мышления. Несмотря на то, что были получены финитные доказательства непротиворечивости довольно значительного фрагмента элементарной теории чисел, вопреки первоначальным ожиданиям Давида Гильберта, так и не удалось финитно установить непротиворечивость арифметики в полном объеме, а тем более для анализа и теории множеств. Причины подобного рода неудач отчасти стали проясняться благодаря второй теореме Гёделя о неполноте. Однако результаты Гёделя не затрагивают основного положения программы Гильберта о возможной реабилитации тех фрагментов математики, которые подверглись критике интуици-

онистов. Поэтому в философии математики рассматриваются постгёделевские модификации программы Гильберта с точки зрения соразмерности рабочих целей этой программы, например, финитного обоснования теории множеств, с ее конечной целью, а именно, обоснования почти всей современной математики.

Поскольку споры о бесконечности в XX веке практически не оказали существенного влияния на развитие большинства математических дисциплин, то академик А.Д. Александров даже высказал гипотезу о том, что через 200-300 лет теория множеств будет восприниматься примерно так же, как сегодня воспринимается средневековая схоластика. "Нынешняя математика с алгоритмической, конструктивной установкой, – говорил он, – как бы возвращается к принципам греческой математики, но, понятно на основе всего предшествующего развития" [2, с. 326]. В качестве основных источников затруднений математиков, требующих вмешательства философов, Людвиг Витгенштейн выделяет следующие два. Это, во-первых, стремление трактовать математику как своеобразную естественную науку и соответствующее понимание ее утверждений по аналогии с эмпирическими, а, во-вторых, это нарастающая тенденция к чрезмерному обобщению, игнорирующая специфику конкретных или отдельных случаев.

Дополнительным параметром в определенности языка науки является человеческая практика. Это напрямую связано с идеей Витгенштейна о том, что значение не может превзойти употребления, поэтому стремление к последовательному обобщению должно уравниваться и сдерживаться бережным отношением к частным теориям. Поскольку если общие теории не способствуют систематизации и разъяснению более элементарных вопросов, то они теряют весь свой смысл. Естественные науки, как бы их ни трактовали в духе наук о материальном мире, имеют дело только с тем миром, который они описывают. Поэтому приходится считаться с "интуитивными установками", которые могут формироваться даже тогда, когда еще нет языковых средств их выражения. Например, утверждения о множествах, если они являются удачными языковыми формулировками соответствующих интуитивных установок, как бы обладают некоторой силой, заставляющей считать их истинными.

Когда математики осознали, что натуральные, вещественные числа и многое другое можно трактовать как множества, то это побудило их заняться общей теорией множеств. В частности, по поводу фундаментального в математике понятия множества тополог А.В. Архангельский говорит: "Опыт современной математики и анализ ее оснований показывают, что множества служат тем основным элементарным материалом, из которого строятся все основные математические объекты. Отсюда вытекает универсальность идеи множества и языка теории множеств для математики" [3, с. 6]. Кроме того, понятия теории множеств по степени общности сравнялись с понятиями логики, хотя при этом пришлось расстаться с привычными нормами мышления. Например, в теории бесконечных множеств высказывание "целое больше своей части" потеряло свой прежний смысл. Серия философских определений понятия множества содержится в переписке Георга Кантора с Давидом Гильбертом (1897 – 1900), где вводится понятие "завершенного множества", которое, по словам Кантора, является "актуально существующей целостностью".

В книгах по современной математике, посвященных "наивной теории множеств", избегают точного определения понятия множества. Тем не менее, трудности специальной математической терминологии для профессионалов не так уж сложны и их всегда можно устранить. Математика для Людвиг Витгенштейна это не только область знания, но также и деятельность, поэтому "ложные ходы" в ней могут существовать только в виде исключения. Говоря о знании в математике, он предостерегал, что здесь важен не "внутренний процесс" или

“состояние”, а интересно именно то, как мы употребляем математические предложения. На естественные науки можно смотреть как на системы ответов на вопросы, но излишнее вопрошание, точнее вопросы, имевшие смысл в прошлом и отражавшие привычки мышления, могут препятствовать развитию науки.

Учитывая некоторые внутренние механизмы самоорганизации науки, можно объяснить эффект распознавания нового знания, частично интерпретируя тем самым и известный парадокс Менона. Заметим, в связи с этим, что даже представление о памяти как о хранилище впечатлений, не является достаточно полным, хотя и выглядит вполне естественным. Человек может основательно забыть то, что он хотел бы вспомнить. Его “акт воспоминания” относится к тому моменту, в котором он должен узнать то, что хранится в его памяти. Для объяснения внутренней силы нового знания математикам иногда не хватает вкуса к философии. Говоря же о специфике философии математики, можно вспомнить известное мнение, восходящее к Платону, согласно которому в определенных ситуациях философское рассуждение может оказаться более необходимым, чем математическое, поскольку последнее покоится на условных допущениях, а философия претендует на безусловность.

Однако формальная проблема о методах решения не является проблемой философии математики, хотя и представляет философский интерес с точки зрения моделирования математической деятельности. Идеализация дедуктивной составляющей математических рассуждений способствовала развитию логико-математической теории доказательств и представлению о математике как исключительно дедуктивной науке. Но математика не сводится только к доказательствам. Интуиция сохраняет в ней свою роль как дополнение или как “противовес” логики. Польский математик и логик Альфред Тарский считал, что “вплоть до конца девятнадцатого столетия понятие доказательства имело главным образом психологический характер” [4, с. 142]. Творческая мысль ассоциативна, поэтому в ней важную роль играет прослеживание самых разнообразных связей, участвующих в любом осознанном понимании довольно сложного доказательства. Это задача не только методологии, но и психологии.

Умение предсказывать правильный результат основывается на мнемонических дополнительных ассоциациях сходства и различия, сопоставления и противопоставления, продуктивного и непродуктивного. По существу, на аргументы, применяемые при доказательствах, не накладывалось никаких ограничений, кроме интуитивной убедительности, хотя уже и начала ощущаться потребность в анализе самого понятия “доказательство”. Такой анализ был проделан логиками, так что начиная с работ немецкого математика Готлоба Фреге, который первый в явной форме ввел в математическую логику кванторы и систематически использовал их, было определено новое понятие формального доказательства. Осуществив дедуктивное аксиоматическое построение математической логики и применив ее в качестве метода обоснования арифметики, Фреге представил математику как продолжение логики.

Заметим, что подход Фреге к арифметике можно мотивировать его антипсихологизмом. Обнаруженный Берtrandом Расселом парадокс поставил под сомнение возможность построения логического основания арифметики. Если отказаться от формалистской установки “все обосновать логически”, то гносеологическую задачу обоснования отсутствия противоречий в арифметике можно считать решенной. Тем не менее, в методологическом контексте, ввиду отсутствия общепринятого критерия достоверности, непротиворечивость арифметики все еще рассматривается как проблема философии математики. И тем не менее, за исключением некоторых элементарных теорий, Альфред Тарский делает вывод о несовпадении понятий истинности и доказуемости относительно всех формализованных теорий, имеющий почти универсальный характер.

То, что философские следствия этого результата негативны по своему характеру, нисколько не уменьшает его эпистемологического значения. Даже в области математики понятие доказуемости, вообще говоря, не замещает понятия истинности. Однако именно доказательство по-прежнему остается единственным методом в любой математической теории, используемым для утверждения истинности ее предложений. Хотя теоремы Гёделя о неполноте и результат Тарского о невозможности определения понятия истинности в формализованных языках свидетельствуют о внутренней ограниченности формализации. Проблема доказательства непротиворечивости математики рассматривается в рамках расширенной программы Гильберта, учитывающей трудности финитивного обоснования трансфинитного, которые сводятся к противопоставлению «онтологическое – лингвистическое».

Неклассическое явление, вскрытое теоремами Гёделя и Тарского, состоит в понимании ограниченности потенциальных возможностей человека с точки зрения его алгоритмической и эвристической деятельности. Непротиворечивость теории контролируется мысленными опытами, играющими важную роль в процессе создания самой теории. Но, с другой стороны, например, психологические рассуждения Брауэра и его последователей апеллируют в основном к элементарному самонаблюдению, не принимая в расчет достижений научной психологии. Ощущение противоречивости возникает и от того, что Брауэр, по словам философа математики В.Э. Войцеховича, «пытался оторваться от платонизма, порвать с античной традицией математиков оперировать идеальными объектами подобно материальным предметам» [5, с. 501]. Интуиционистско-неплатонистский стиль Брауэра способствовал созданию новых направлений в философии математики.

Методологическая компонента современного математического доказательства включает и такие сугубо «человеческие» характеристики, как обозримость, убедительность и понимание. У современного математического доказательства нет «точного» определения, поэтому роль субъективного элемента в его понимании и восприятии как «убедительного» рассуждения зависит от методологических установок ученых-математиков. Тем не менее, вполне возможно, что современная математика, выдвигающая новые стандарты строгости рассуждений, представляет, с точки зрения будущей математики, альтернативный вариант математического доказательства. Наука не сводится только к доказательным утверждениям, поэтому интуиция должна сохранить исторически предназначенную роль дополнения или «противовеса» логики.

Именно на этом и основана вера в то, что наука и математика могут выходить за пределы наших познавательных возможностей. Хотя канторовская теория множеств стала «миром», вместившим почти всю математику, постепенно угасает тот восторг, который охватил многих математиков после канторовского «прорыва в бесконечность». Отдельные математические дисциплины «ответственность» за свою непротиворечивость «возложили» на теорию множеств. Сложность создавшейся ситуации состоит в том, что теория множеств привнесла в математику целый набор частных случаев актуальной бесконечности, большинство из которых нельзя разумно интерпретировать в реальном мире. С философской точки зрения математику можно использовать для выражения мыслей, предваряющих знание, которые в дальнейшем нельзя иногда проверить.

После того как огромная работа, проделанная математиком и философом Георгом Кантором и другими математическими мыслителями, такими как Лейтцен Брауэр и Давид Гильберт, стала достоянием истории, прагматически настроенным математикам, не слишком склонным интересоваться философской стороной вопроса, стала казаться вполне естественной мысль о том, что математика, как и всякое сложно устроенное «творение ума человеческого», должна

быть “возведена” на достаточно прочном основании. Первым реальную идею сознательно продуманной “архитектурной программы” для современной математики предложил именно Кантор. Сам Георг Кантор отмечал, что столь трудная и всеобъемлющая тема как проблема бесконечности была объектом самых различных мнений и толкований, но ни математики, ни философы не пришли здесь к полному согласию.

Математика занимает в теории познания особое положение, хотя она и принадлежит в своих истоках к естественным наукам, в современном обличье ее можно отнести, в некоторой степени, и к гуманитарным наукам. Это направление математики возникло из других источников благодаря развитию в ней теорий алгоритмов, игр, операций, информации и оптимизации. Поэтому, наряду с возрастанием роли алгоритмических решений и компьютерной математики, существенной особенностью математики наших дней является включение в ее среду исследований человеческой деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихомиров В.М.** Финитизация бесконечности в классическом анализе // Бесконечное в математике: философские и исторические аспекты. – М.: Янус-К, 1997. – С. 177-189.
2. **Александров А.Д.** Наука наших дней // Академик А.Д. Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. – М.: Наука, 2002. – С. 321-332.
3. **Архангельский А.В.** Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во Московского университета, 1988. – 112 с.
4. **Тарский А.** Истина и доказательство // Вопросы философии. – 1972. – № 8. – С. 136-145.
5. **Войцехович В.Э.** Господствующие стили математического мышления // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: Изд-во РХГИ, 1999. – С. 495-505.

SUMMARY

Philosophical problems of the contemporary mathematics are concentrated in the gap between logical and paradoxical like mesoworld of physical phenomena. Conceptual changes in the problem of the contemporary mathematics grounding are analyzed in the paper.