УДК 511.36

Н.В. ШАМУКОВА

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НУЛЯ МОНИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Для любой точки $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ можно подобрать такие целые числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $H = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$, что будет выполняться неравенство

$$|a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| < H^{-n}. \qquad (1)$$

Этот факт следует из известной теоремы Минковского о линейных формах [1], хотя существует и более элементарное доказательство неравенства (1) с помощью принципа Дирихле. Более того, для $\forall \overline{x}$ неравенство (1) имеет бесконечное число решений в целых числах a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$

Очень интересной и содержательной является специализация (1) при $x_i = x^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ В этом случае нуль в левой части неравенства достигается при алгебраических x, а по величине правой части в (1) при трансцендентном x можно уже судить о том, насколько x близко к алгебраическому числу. В этом случае с теоретико-множественной точки зрения задача хорошо изучалась. Пусть $\Psi(x)$ – монотонно убывающая функция и μA – мера Лебега множества $A \subset \mathfrak{R}$. Обозначим через $Z_n(\Psi)$ множество действительных $x \in I = [a,b]$, для которых неравенство $|P_n(x)| = |a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| < H^{-n+1}\psi(H)$ имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P_n(x)$, $\deg P_n \le n$.

В [2,3] доказано, что $\mu Z_n(\Psi)=\begin{cases}0, \text{ при} \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)<\infty, \\ \mu I, \text{ при } \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)=\infty.\end{cases}$

Задача значительно усложняется, если $a_n=1$, т.е. полином $P_n(x)$ – монический. Такие полиномы интересны уже хотя бы потому, что их корни являются целыми алгебраическими числами. В [4] для таких полиномов доказан аналог случая расходимости. В настоящей работе мы при $n=3$ исследуем случай сходимости при $\Psi(x)=x^{-1-\varepsilon}$,$\forall\varepsilon>0$.

Теорема. При любом $\varepsilon>0$ неравенство

$$|P_3(x)|<H^{-2-\varepsilon} \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в монических многочленах третьей степени только для множества нулевой меры.

Предварительно дадим несколько определений и приведем леммы, необходимые для доказательства.

Пусть χ_j, $1\le j\le n$, какой-либо корень полинома $P(x)$, $\deg P(x)=n$. Через $S(\chi_j)$ обозначим множество комплексных чисел z, которые удовлетворяют условию $|z-\chi_j|=\min\limits_{1\le i\le n}|z-\chi_i|$, т.е. множество комплексных чисел, удаленных от χ_j не более, чем от других корней $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_n$.

Через $H(P)$ будем обозначать максимальный по модулю коэффициент многочлена $P(x)$, а через $c_1,\dots,c_k$ – некоторые величины, которые зависят только от n.

Лемма 1. Пусть $P_1(x),\dots,P_k(x)$ – полиномы.

Тогда $c_1\prod\limits_{i=1}^{k}H(P_i)<H\prod\limits_{i=1}^{k}|P_i(\chi)| < c_2\prod\limits_{i=1}^{k}H(P_i)$.

Лемма 2. Пусть $P\in P_n(H)$; ω – вещественное или комплексное число, Тогда $\omega\in S(\chi_1)$.

$$|\omega-\chi_1|<2^n\min\left(\frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_1)|},\left(\frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_1)|}|\chi_1-\chi_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма 3. В условиях леммы 2 всегда

$$|\omega-\chi_1|<c(n)H^{n-2}|D(P)|^{-\frac{1}{2}}|P(\omega)|.$$

а если χ_1 – комплексный корень, то верно неравенство:

$$|\omega-\chi_1|^2 < c(n)|\operatorname{Im}\chi_1|^{-1} H^{n-3}|D(P)|^{-\frac{1}{2}}|P(\omega)|^2.$$

Лемма 4. Пусть (на прямой или на плоскости) дана система $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ измеримых множеств A_i с условием $\sum_{i=1}^{\infty} mesA_i < \infty$. Тогда мера множества точек, попадающих в бесконечное число множеств A_i, равна нулю. Доказательство лемм 1-4 приведено в [5, с. 19, 20, 26].

Доказательство теоремы. Ясно, что в неравенстве (2) можно рассматривать только неприводимые полиномы, так как если $P(x)$ приводим, то разложим его на множители и воспользуемся *леммой 1*. Для многочленов первой степени теорема очевидна, а для многочленов второй степени доказательство несложно [5, §8]. Зафиксируем неприводимый полином $P(x)$, возьмем один из его корней χ_1 и, воспользовавшись *леммой 3*, получим

$$|x-\chi_1| < c_3 H^{-1-\varepsilon}|D(P)|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

В (3) имеем $D(P)\neq 0$, поскольку $P(x)$ неприводим. Вычислим дискриминант $D(P)$ многочлена $P(x) = x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Он равен

$$D(P) = 4a_0a_2^3 - a_1a_2^2 - 18a_0a_1a_2 + 4a_1^3 + 27a_0^2. \quad (4)$$

Один из коэффициентов $P(x)$ равен *H*. Рассмотрим класс многочленов $T_2(N)$, у которых высота равна *N* и достигается на коэффициенте a_2. Если высота совпадает с a_1, то дискриминант $D(P)$ в (4) можно переписать как полином третьей степени от a_1 с аналогичным дальнейшим доказательством.

Пусть нам для произвольного $\varepsilon>0$ удалось получить оценку

$$\sum_{\max(|a_0|,|a_1|)<c_4N} |D(P)|^{-\frac{1}{2}} < c_5 N^{\varepsilon_1}. \quad (5)$$

Тогда все $x\in S(\chi_1)$, $P\in T_2(N)$, покрываются объединением интервалов *I(P)* длины не более удвоенной правой части (3). Поэтому ввиду (5)

$$\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{P\in T_2(N)}|I(P)| < \sum_{N=1}^{\infty} 2c_3N^{-1-\varepsilon}\sum_{P\in T_2(N)}|D(P)|^{-\frac{1}{2}} < c_6\sum_{N=1}^{\infty} N^{-1-\varepsilon+\varepsilon_1}. \quad (6)$$

По любому ε мы могли в (5) взять $\varepsilon_1<\varepsilon$. Тогда в (6) имеем сходящийся ряд и лемма 4 завершает доказательство. Осталось получить оценку (5).

Полиномы из класса $T_2(N)$ разобьем на подклассы $T_2(N,t)$, относя к одному классу полиномы с условием

$$2^t \le |D(P)| < 2^{t+1}. \quad (7)$$

Так как $1 \le |D(P)| < c_7 N^4$, то

$$0 \le t < c_8 \ln N. \qquad (8)$$

Из оценки $$\sum_{P \in T_2(N,t)} |D(P)|^{-\frac{1}{2}} < c_9 2^{-\frac{t}{2}} \sum_{|D(P)|<2^{t+1}} 1 \qquad (9)$$

вытекает, что нужно подсчитать число пар целых чисел (a_0, a_1) из квадрата $[-N, N]^2$ для которых $|D(P)| < 2^{t+1}$. Воспользуемся *леммой 2* для оценки длины интервала изменения a_2. Получим

$$\begin{aligned} |a_2 - \chi(D)| &< c_{10} 2^t \left| D'_{a_2}(\chi(D)) \right|^{-1} = \\ &= c_{10} 2^t \left| 12 a_0 a_2^2 - 2 a_1 a_2 - 18 a_0 a_1 \right|^{-1} = c_{10} 2^t \left| P_2(a_2) \right|^{-1}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Значения полинома $P_2(a_2)$ опять разобьем на подклассы $P_2(a_2, l)$ относя к одному подклассу полиномы с условием

$$2^l \le |P_2(a_2)| < 2^{l+1}, \quad 0 \le l < c_{11} \ln N. \qquad (11)$$

Значения $|P_2(a_2)|$ разобьем на "большие" и "малые" в зависимости от l. Пусть $l > \frac{t}{2}$, тогда (10) можно оценить величиной $c_{12} 2^{\frac{t}{2}}$, а (9) – величиной c_{13}. Суммирование этой оценки по всем t и l приведет к оценке $c_{14} \ln^2 N$, что меньше N^{ε_1} при любом $\varepsilon_1 > 0$ и $N > N_0(\varepsilon_1)$.

Если $l \le \frac{t}{2}$, то значения $P_2(a_2)$ можно упорядочить по возрастанию как арифметическую прогрессию [5, §8] и $\sum_{|D(P)|<2^{t+1}} 1$ оценить $c_{15} 2^{\frac{t}{2}} \ln N$. Опять просуммировав эту оценку по l и t, получим $c_{16} 2^{\frac{t}{2}} \ln^3 N < 2^{\frac{t}{2}+\varepsilon_2}$ для любого $\varepsilon_2 > 0$ и $N > N_0(\varepsilon_2)$. Теперь правая часть в (9) оценится $c_{17} N^{\varepsilon_2}$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Касселс Дж.*** Введение в теорию диофантовых приближений. – М., ИЛ, 1961.
2. ***Берник В.И.*** // Acta Arithmetica.1989, V. 53, № 1, pp. 17-28.
3. ***Beresnevich V.V.*** // Acta Arithmetica. 1999, V. 90, № 2, pp 97-112.
4. ***Bugeaud Y.*** // T. London Math. Soc., 65, 2002, pp. 547-559.
5. ***Спринджук В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и техника, 1967.

SUMMARY

The analogue of V.G. Sprindzuk's theorem for monic polynomials of third degree is proved in the work. This was done using the method of discriminate reverse values summing.