УДК 101.1:510.2

Н.В. МИХАЙЛОВА

МЕЗОМИР НАУКИ И ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Человек во Вселенной представлялся Блезу Паскалю как нечто “среднее между всем и ничем” (“un milieu entre rien et tout”). Эта мысль не прошла мимо великих мыслителей прошлого. Анализ онтологических оснований математического мышления оправдывает априорность и реальность математического знания. Однако трудность такого анализа состоит в том, что онтологические характеристики не могут быть определены только в логических и математических терминах.

Великий мыслитель прошлого века Людвиг Витгенштейн, углубляясь в область философских оснований математики, пытался понять специфику математики. Опыт осмысления оснований математики в XX веке привел Витгенштейна к следующему выводу: “традиционная трактовка математики слишком идеализирована, математики и философы математики издавна исходят из платоновского представления о вечном и неколебимом основании математики, о сверхнадежном и неопровержимом характере математического знания” [1, с. 26]. Поэтому при оценке математического идеала он призывал отнестись к математике более реалистично. Математическое познание осуществляется двумя путями: через взаимодействие или столкновение математических понятий с содержанием мышления и реальной деятельностью.

Основная методологическая проблема современного естественнонаучного знания состоит в объяснении взаимодействия математического и физического миров. Развитие современной квантовой физики показывает, что “макроскопическая” интуиция скрывает “микроскопические” явления совсем другой природы. Упомянем также о двух уровнях методологии математики – микроскопическом, к которому можно отнести методы и приемы отдельных математиков, и макроскопическом, связанном с законами и движущими силами развития математики. Философские проблемы современной математики, с учетом критики классической математики, проведенной Брауэром, концентрируются на некотором среднем плане практического построения и обоснования математики. Подобные проблемы возникают и при исследовании “мезомира”, то есть области физических явлений между классическим макромиром и квантовым микромиром, в котором не исключены смешанные состояния и процессы.

Подобное заключение можно сделать и по поводу всеобъемлющей аксиоматической теории множеств. В излюбленной афористической манере Людвиг Витгенштейн, подчеркивая различие функций и проблем математиков и философов, повторяет, что в математике есть только математические трудности, а вовсе не философские. Хотя за аксиоматическими системами стоят вполне определенные интуитивные мотивировки доказательства и, соответственно, связанная с ними дополнительная убедительность, такие психологические элементы, с точки зрения математики, не допускают строгого анализа. Единственный способ добиться абсолютной строгости состоит в том, чтобы избавить математические суждения от всякого смысла и рассматривать их как последовательность определенного рода знаков. Интересно то, что находится в промежутке двух крайностей – между порядком и свободой, между детерминированным и случайным, между логическим и парадоксальным.

Заметим, что понятие “интерес” происходит от латинского “inter-esse”. Буквально это понятие означает “быть между, в промежутке”. Нас чаще всего интересует такая идея, в которой, при всем ее рациональном содержании, есть что-то необычное и странное, выходящее за границы здравого смысла. Логика мезомира исключает многие мыслимые, но физически невозможные состояния макромира. “Именно поэтому мезомир, – писал академик Б.Б. Кадомцев, – это очень подвижный и живой мир сложно организованных коллективных явлений” [2, с. 494]. Из-за разнообразия конкретных физических условий, в которых возможно сочетание классических и квантовых процессов, не существует, вообще говоря, универсального рецепта для описания мезомира.

Никакой фрагмент математики не может решить важнейшие проблемы, волнующие философов и математиков. Несмотря на то, что континуум-гипотеза является, по выражению Пола Коэна, “драматическим примером” абсолютно неразрешимого суждения, важнейшим препятствием для удовлетворительного развития философии математики является гёделевская теорема о неполноте. Тем не менее, трудно согласится с тем, что гёделевский анализ доказательства лучше выражает это понятие, чем альтернативные концепции, поскольку он игнорирует реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Людвиг Витгенштейн свою задачу, в связи с теоремой Гёделя, видел в том, чтобы выяснить, что означает в математике предложение типа “предположим, что это можно доказать”.

Основная особенность математики, отличающая ее от других наук, состоит в установлении констатации окончательных истин. Основу аппарата и языка любой специальной области математики, согласно Бурбаки, составляют фундаментальные структуры математики, отражающие в наиболее полной форме важнейшие общие черты математизируемой реальности. Несмотря на стилистические различия, имеются определенные аналогии во взглядах Витгенштейна и Бурбаки по поводу тех свойств доказательств, которые выделяются в традиционных основаниях. Скептицизм Витгенштейна распространяется на теоретико-множественные основания, а Бурбаки, подчеркивая важность своих структур, стараются избегать упоминаний об их связи с теорией множеств. Однако понятие структуры не решает, а скорее “рассасывает” эпистемологические проблемы в духе витгенштейновской терапии.

Логические основания анализируют истинность математических аксиом и правил, опираясь на концепции природы математики. В математических основаниях истинность подразумевается и, выбирая подходящий язык, математики, пытаются сделать формальные рассуждения доступными пониманию. Шведский математик Ларс Гординг в философском диалоге математика от имени фон Неймана говорит: “Иногда тот или иной философ возражает против нашего способа понимания, но философы ставят под вопрос все, и можно не обращать внимания на то, что они говорят. У них никогда не бывает упорядоченного набора аксиом. Если бы математика содержала противоречие, оно было бы возможно только на ее философской периферии и могло бы быть устранено за счет небольших изменений” [3, с. 216]. Парадоксы в основаниях математики никак не отразились на устойчивости ее наиболее продвинутых теорий, сориентированных на убедительность непосредственного восприятия предпосылок и выводов.

Абстрактные математические конструкции отражают, по Гёделю, такие аспекты объективной реальности, которые не даются посредством ощущений.

В теореме Гёделя о неполноте речь идет не о вечных истинах, а о некотором способе перечисления утверждений в логической системе. Любая полностью формализованная логическая система, согласно Гёделю, должна содержать, по крайней мере, одну антиномию. Результаты Курта Гёделя довольно быстро признали в качестве фундаментального вклада в основания математики. Классические исследования Альфреда Тарского показали, что естественный язык плюс обычная двузначная логика уже образуют противоречивую систему, поскольку в двузначной логике из противоречия может следовать все что угодно, а в естественном языке есть, например, пользующийся наибольшей известностью из нематематических парадоксов так называемый парадокс лжеца.

Скептически оценивая затею подвести под математику особо прочный фундамент, Людвиг Витгенштейн считал, что она порождена неверным философским образом математики как особого, исключительно надежного знания, поскольку, если что-то ненадежно в самой математике, то и любое ее основание будет столь же ненадежным. Концепции и результаты, будучи парадоксальными и бросающими вызов времени, с точки зрения последующих поколений математиков, могут стать банальностями. Нильс Бор говорил, что работа науки – это сведение всех тайн к тривиальностям. За последние полвека физики столкнулись с теоретическим противоречием на фундаментальном уровне несовместимости между общей теорией относительности и чрезвычайно тщательно проверенной теорией – квантовой механикой. Это противоречие говорит об отсутствии некоторого фундаментального звена в нашем понимании природы.

Неклассичность физики XX века обусловлена появлением новых соотношений между описываемым явлением и его описанием, а также осознанием разрыва между тем и другим. В поисках единой теории общая теория относительности и квантовая механика необходимы друг другу для того, чтобы теоретические конструкции обрели надлежащий смысл. "Согласно теории суперструн, – как утверждает физик-теоретик Брайан Грин, – брачный союз законов макромира и микромира не только счастливый, но и неизбежный" [4, с. 12]. Парадоксы науки сыграли важную роль в эволюции математики. Они захватывают, льстят, провоцируют, забавляют, злят и соблазняют. Важнее всего то, что они вызывают любопытство, стимулируют и мотивируют. Парадоксы и антиномии, в том числе и канторовской теории множеств, интересны, прежде всего, как проблемы для философских дискуссий и размышлений.

Математическое знание с философской точки зрения принято делить на априорное, онтологически определенное в своих исходных интуициях, и на формальное знание, оправданное внутренней логикой развития математики. Применение философских терминов – парадокс и антиномия – смягчало чисто лингвистическими приемами кризисную ситуацию в основаниях теории множеств в качестве своеобразного анестезирующего средства, поскольку в соответствии с правилами логики в математике, построенной на теории множеств, после обнаружения хотя бы одного теоретико-множественного парадокса становятся доказуемыми все высказывания, в том числе и ложные. То, что математики на протяжении последних ста лет довольно сдержанно относятся к сосуществованию с парадоксами теории множеств – это уже, скорее всего, проблема не математики, а психологии всего научного познания.

Математики фундаменталистского направления не хотят отказываться от пользования законами аристотелевской логики по причине их простоты, они, не смотря ни на что, образовывают экзистенциальные суждения и продолжают пользоваться законом исключенного третьего. Если же профессиональный математик отказывается от закона исключенного третьего на том основании, что его схема используется в парадоксе лжеца, то возможно, что за таким отказом стоит не столько логическая и философская неудовлетворенность, а причины нравственного и психологического страдания. Однако основная задача теории познания состоит в онтологическом, а не в психологическом анализе процессов сознания. В таком контексте принято говорить о конфликте между объективным и субъективным, но он становится менее острым и драматичным после его конкретизации в математических примерах.

Пониманию этой проблемы способствует интеллектуальная революция прошлого века, связанная с быстрым развитием и распространением компьютеров. Можно сказать, что персональные компьютеры – это зачатки искусственного интеллекта. Проблему искусственного интеллекта можно разделить на три части, первая из которых связана с развитой автоматизацией и соответствующим программным математическим обеспечением компьютеров, третья – это круг проблем из области нейрофизиологии, связанной с компьютерными исследованиями центральной нервной системы. Вторая часть наиболее сложна и иллюзорна, поскольку пытается связать конкретные достижения в области автоматизации и мире нейрофизиологии. Именно эта часть, т.е. "мезомир рассматриваемой проблемы", по существу, отводится искусственному интеллекту.

Можно указать на столь близкие отношения между объектами и методами в некоторых разделах математики, что рассматриваемые объекты могут быть даже охарактеризованы в терминах методов. Для понимания реальной проблемы этого отношения можно сравнить физические объекты, видимые для невооруженного глаза, с теми, которые невидимы, хотя видимость не относится к характеристическому свойству большинства физических явлений. "В экономических приложениях, – отмечал академик Л.В. Канторович, – первостепенное значение приобретает концепция двойственности функциональных пространств" [5, с. 11]. В качестве иллюстративного примера можно привести известный математический принцип проективной двойственности, который по существу является метаматематическим, так как представляет собой утверждение о языке проективной геометрии.

Следование с должной строгостью законам современного математического языка делает математическую теорию более отчетливой и позволяет, в известном смысле, сформулировать невыразимое, а также поймать в "сети языка" ускользающую или неясную сущность некоторых объектов математического мира. Сказанное можно объяснить на примере теории действительных чисел, являющейся основой математического анализа. Эту теорию можно рассматривать как занимающую некоторое среднее или промежуточное положение между арифметикой и теорией множеств, поскольку с одной стороны, она опирается на дискретную природу алгебраических положений, а с другой – на идею непрерывности, выраженную в континууме. Дополнительная сторона этой замечательной возможности чисто психологического толка, поскольку мысль, опередившую свое формальное воплощение в духе совершенной точности современных доказательств, сейчас не рассматривают всерьез.

Нужен достаточно убедительный набросок доказательства или, на худой конец, конкретные гипотезы. Значение слова, по Витгенштейну, есть способ его употребления. Людвиг Витгенштейн считал, что в каждом языке присутствует мистический элемент, необъяснимый в рамках самого этого языка. Строгое обоснование этого утверждения было дано впоследствии Куртом Гёделем. Для концепции формализма результаты Гёделя представляли собой логико-математическое опровержение, в то время как математическая практика указывает на менее очевидные недостатки этой концепции. В своей глубинной онтологии математические объекты сходны с игровыми объектами. Отличие их в том, что в математике каждый уровень абстракции целиком исследуется в рамках заданных формальных правил, а затем уже на другом уровне абстрактности происходит принципиальное изменение самих исходных математических объектов и правил.

Взгляд на математику как на царство платонистских идеалов, согласно которому доказываемые в ней истины относятся к идеальным понятиям и объектам, ошибочен, поскольку математические объекты суть символы операций или действий математической игры в дедукцию, проводимой по определенным правилам. Они столь же реальны, как реален соразмерный человеку мир действия. Согласно формалистской точке зрения, разрабатываемой в духе программы Гильберта, математику можно рассматривать как чисто формальную игру с единственным требованием, чтобы она не приводила ни к какому противоречию. Однако для полного описания формальной игры потребовалось уточнить правила математической логики, после чего математики, специализировавшиеся на проблемах оснований математики, занялись доказательством непротиворечивости различных аксиом.

Центральным понятием концепции Витгенштейна является понятие языковой игры. "Термин "языковая игра", призван подчеркнуть, – считал Витгенштейн, – что говорить на языке – компонент деятельности или форма жизни" [6, с. 90]. Это один из наиболее спорных аспектов его концепции мышления и, вместе с тем, одна из основных философских проблем теории познания. Трактовка Витгенштейном этой проблемы во многом туманна и неудовлетворительна с точки зрения математического формализма. Размышляя о бесчисленном множестве типов предложений, он говорит, что эта множественность не представляет собой нечто устойчивое, раз и навсегда данное, кроме того, он утверждает, что философия никоим образом не может вмешиваться в употребление языка. Это мнение Витгенштейна не согласуется с философской традицией, согласно которой основной путь фундаментальных рациональных изменений пролегает через интеллектуальную критику соответствующих категорий.

Именно таким образом происходили концептуальные сдвиги в развитии современной логики, неевклидовой геометрии, нестандартного анализа, теории относительности Эйнштейна, принципа дополнительности Бора. Принцип дополнительности имеет фундаментальное значение в методологии науки и культуры XX века, обосновывая релятивизм познания, он способствовал появлению в культурной практике феномена культурно-философской парадигмы постмодернизма, включающей дополнительность языков и языковых игр. Основную идею Витгенштейна можно интерпретировать так, что слова должны ассоциироваться не только с их смыслами, но и с социальными конвенциями, действующими в рамках соответствующих языковых игр, по аналогии с поведением людей в разных формах социальной и концептуально-мыслительной деятельности. Поэтому для него основаниями математики служат также психологические и социальные факты.

Социологический подход Витгенштейна позволяет ему избежать некоторых сложностей платонистской философии, согласно которой обязательность математических принципов обусловлена сущностью математических объектов. Для понимания этого рассмотрим отдаленную аналогию с литературными жанрами Александра Солженицына, на которые сильное влияние оказывает то, о чем он рассказывает. Начал он с обычной новеллы "Один день Ивана Денисовича", сразу ставшей заметным культурным событием. Затем перешел к более крупным вещам, например, к "Раковому корпусу", а потом к чему-то среднему, т.е. "литературному мезомиру” между романом и хроникой – эпопее “Красное колесо”. Заметим, что в отличие от словесных тавтологий, укорененных в различных языковых играх, математические процедуры приводят иногда к открытиям.

Когда Гильберта обвиняли в стремлении свести математику к сплошной языковой игре, он указывал, в частности, на то, что введение идеальных элементов для достижения полноты является не только общим методом для всех областей математики. Даже в физике – науке, смежной с математикой, – тоже экспериментально не проверяют отдельные утверждения, поскольку, в соответствии с методологическими выводами концепции дополнительности, только вся система в целом может в принципе сопоставляться с опытом. Когда операционный подход послеканторовского периода распространился на современную физику, привлекательность формальных языковых систем, возможно, увеличилась. Поэтому математику можно рассматривать как особую область эмпирических открытий, работающую с непосредственно данными объектами, к которым в математике скорее относятся формальные языки, чем бесконечные множества.

Сказанное можно продемонстрировать на таком сравнительно недавно открытом явлении как изменение некоторых важных характеристик математической модели, например, таких как непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров, при эквивалентных, в классическом смысле, ее преобразованиях. Начиная с открытия в начале XX столетия Жаком Адамаром класса некорректных задач, считалось, что все задачи математической физики делятся на два класса – корректных и некорректных задач. В конце XX столетия выяснилось, что существует третий своеобразный “класс “задач-перебежчиков”, перебегающих из класса корректных в класс некорректных (или, наоборот) при эквивалентных преобразованиях, используемых при их решении” [7, с. 250]. С практической точки зрения новый класс задач раскрывает еще один источник возможных ошибок при вычислениях.

С философской точки зрения понимание математической теории как структурированного опыта или как учение только о структурах неприемлемо, поскольку такой подход не вскрывает специфики исходных математических представлений, имеющих как онтологический, так и имперический характер. Согласно Бурбаки, математика в своей аксиоматической форме представляется через математические структуры и оказывается, что некоторые аспекты экспериментальной действительности в результате лейбницевой “предустановленной гармонии”, хотя и непонятно почему, укладываются в некоторые из этих форм. Однако, использование математических терминов не схватывается аксиомами или формальными выводами и поэтому нуждается в дополнительном объяснении. Это дополнительное объяснение выявляется в способах употребления математического языка, хотя само по себе это объяснение, как иррациональный фрагмент математики, может не осознаваться.

Этот методологический разрыв анализируется философами-физиками и философствующими математиками, которые исследуют не только идеализированную объективизацию в теории, но также и предпосылки возможности такой объективизации. Разговор о подобном представлении теории будет оставаться непродуктивным до тех пор, пока физика будет отказываться рассматривать проблему сознания, поскольку математические объекты являются необходимыми структурами сознания и, следовательно, необходимыми структурами реальности. И хотя преждевременно говорить о детализированной теории сознания, было бы полезно попытаться раздвинуть математические и физические рамки для ее описания.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Козлова М.С.*** Проблемы оснований математики // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть II. – М.: Изд-во "Гнозис", 1994. – С. VII-XXX.
2. ***Кадомцев Б.Б.*** Динамика и информация // Успехи физических наук. – 1994. – Т. 164. – № 5. – С. 449-530.
3. ***Гординг Л.*** Философский диалог. Математика, жизнь и смерть // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – Вып. 5. – С. 215-224.
4. ***Грин Б.*** Элегантная вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. – М.: УРСС, 2004. – 288 с.
5. ***Канторович Л.В.*** Функциональный анализ // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28. – № 1. – С. 7-16.
6. ***Витгенштейн Л.*** Философские работы. Часть I. – М.: Изд-во "Гнозис", 1994. – 520 с.
7. ***Петров Ю.П., Сизиков В.С.*** Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. – СПб.: Политехника, 2003. – 261 с.

SUMMARY

Philosophical problems of the contemporary mathematics being focused in the gap between logical and paradoxical like the mesoworld of physical phenomena, conceptual changes in the problem of the contemporary mathematics substantiation are analyzed in the paper.