УДК 519.8

Н.М. ЛЕЩЕНКО

МИНИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ОПЕРАЦИЙ И КРИТЕРИЕМ МИНИМИЗАЦИИ ОБЩЕГО ВРЕМЕНИ

Поточные системы обслуживания. В данной работе рассматривается задача построения оптимального по быстродействию расписания поточной системы обслуживания с двумя приборами. При этом предполагается, что для длительностей операций известен лишь интервал возможных значений.

Задача построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания двумя последовательными приборами *n* требований исследуется уже несколько десятилетий в детерминированной и стохастической постановках. В 1954 г. в работе [8] Джонсон предложил полиномиальный алгоритм решения детерминированной задачи поточной системы обслуживания с двумя приборами (т.е. для случая, когда длительности всех операций известны до начала построения расписания). Стохастическая постановка задачи может быть двух видов. В задачах первого вида предполагается, что длительности операций являются случайными величинами с известным законом распределения, и в литературе в основном рассматривается распределение по показательному закону (случай двух приборов подробно исследован, например, в [6, 9]). В задачах второго вида длительности операций обычно детерминированы (и фиксированы до начала построения расписания), но времена завершения обработки меняются случайным образом в результате возможных поломок приборов (в [1-4] рассматривается такая задача для случая двух приборов).

Задача построения расписания со случайными длительностями операций является более общим случаем по сравнению с задачей построения расписания с контролируемыми длительностями операций. В последней задаче критерием является выбор как оптимальных длительностей операций (которые контролируются лицом, принимающим решения), так и оптимального расписания с измененными длительностями операций (см. [7, 13]). Похожая задача была рассмотрена в [10, 11] для поточной системы обслуживания с неопределенными числовыми данными. Так, в [11] была предложена формула для вычисления радиуса устойчивости оптимального расписания, т.е. величины изменения длительностей операций, при которых данное расписание остается оптимальным.

В данной работе рассматривается задача построения расписания для поточной системы обслуживания с неопределенными длительностями операций. При этом предполагается, что информация о законе распределения вероятностей случайных длительностей операций отсутствует, а длительности операций располагаются между заданными нижней и верхней границами с вероятностью 1. Естественность таких предположений основана на том, что на практике нижние и верхние границы изменения длительностей операций могут быть легко получены даже при неизвестном законе распределения вероятностей.

Отметим, что в [5] рассмотрена аналогичная задача поточной системы обслуживания с двумя приборами и интервалами изменения длительностей операций, и предложены некоторые достаточные условия построения оптимального решения. В данной работе продолжены исследования этой задачи и получены необходимые и достаточные условия построения оптимального решения на основании достаточных условий работы [5].

Постановка задачи и основные определения. Два прибора $M = \{1, 2\}$ должны обслужить n требований $N = \{1,2,...,n\}$ с одинаковыми маршрутами (1, 2) (вначале требование обслуживается прибором 1, а затем прибором 2). Предполагается, что длительность выполнения операции t_{jm} по обслуживанию требования $j \in N$ прибором $m \in M$ не фиксирована на момент составления расписания, причем случайная величина t_{jm} может принимать любое действительное значение между заданной нижней границей t_{jm}^L и заданной верхней границей t_{jm}^U. Будем предполагать, что каждое требование обслуживается каждым прибором не более одного раза и прерывания операций запрещены. Пусть $C_j(s)$ обозначает время завершения обслуживания требования $j \in N$ при реализации расписания *s*, а критерий $C_{\max}$ – минимизацию длины расписания при конкретной реализации длительностей операций: $\max\{C_j(s) \mid j \in N\}$. Поставленную задачу будем обозначать через $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$. Здесь символ F указывает на то, что в обслуживающей системе маршруты обслуживания требований одинаковые (в англоязычной литературе такие системы принято обозначать Flow Shop).

При фиксированных длительностях операций, т.е. когда $t_{jm}^L = t_{jm}^U$ для всех $j \in N$ и $m \in M$, задача $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$ превращается в классическую задачу $F2 \| C_{\max}$, которая хорошо изучена [12, 14]. В [8] предложен полиномиальный алгоритм Джонсона сложности $O(n \log n)$ построения оптимального расписания для задачи $F2 \| C_{\max}$, основанный на следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Общее время обслуживания n требований двумя последовательными приборами достигает наименьшего значения, если каждый прибор обслуживает требования в одной и той же последовательности* $\pi = (i_1, i_2, ..., i_n)$, *удовлетворяющей следующему условию*

$$\min\{t_{i_l 1}, t_{i_{l+1} 2}\} \le \min\{t_{i_{l+1} 1}, t_{i_l 2}\},\ l = \overline{1, n-1}. \tag{1}$$

Такие расписания, в которых приборы обслуживают требования в одной и той же последовательности, называют перестановочными расписаниями. Доказательство теоремы 1 приводится, например, в книге [14].

Следует заметить, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Иными словами, условие (1) является достаточным условием оптимальности перестановки π, но не является необходимым условием оптимальности π. Оптимальную перестановку *n* требований для задачи $F2 \| C_{\max}$ можно построить по следующему правилу.

П р а в и л о Д ж о н с о н а. *Разделим множество требований N на два непересекающихся подмножества* N_1 *и* N_2, *где множество* N_1 *содержит требования, для которых выполняется неравенство* $t_{i1} \le t_{i2}$, *а множество* N_2 – *требования, для которых выполняется неравенство* $t_{i1} \ge t_{i2}$. *Требования, для которых выполняется равенство* $t_{i1} = t_{i2}$, *могут быть либо во множестве* N_1, *либо во множестве* N_2. *В результате получаем* $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. *В оптимальном расписании задачи* $F2 \| C_{\max}$ *требования из мно-*

жества N_1 обслуживаются первыми в порядке неубывания значений t_{i1}, вслед за ними обслуживаются требования множества N_2 в порядке невозрастания значений t_{i2}.

Перестановку π, построенную по правилу Джонсона, будем называть перестановкой Джонсона. В силу теоремы 1 оптимальное расписание для задачи $F2||C_{\max}$ определяется перестановкой π, но, как уже отмечалось, для задачи $F2||C_{\max}$ оптимальное расписание может определяться и перестановкой, которая не удовлетворяет условию (1). Тем не менее, в дальнейшем множество рассматриваемых оптимальных расписаний для задачи $F2||C_{\max}$ будет ограничено указанными перестановками Джонсона.

Пусть s_k обозначает подпоследовательность последовательности π. Например, $\pi = (s_1, j, s_2)$ обозначает последовательность, в которой требование j обслуживается между последовательностями требований s_1 и s_2. Если $j \neq w$, $\pi_u = (s_1, j, s_2, w, s_3)$ и $\pi_v = (s_1, w, s_2, j, s_3)$, то последовательности π_u и π_v одинаковые за исключением порядка обслуживания требований j и w.

В [12] показано, что среди перестановочных расписаний содержатся оптимальные и для поточной системы с двумя приборами и случайными длительностями операций. Поскольку мы предполагаем, что длительности операций представляют собой случайные величины, то перестановочные расписания содержат оптимальные и для задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$. Следовательно, можно искать решение такой задачи среди подмножеств множества $n!$ перестановок, поскольку гарантируется, что найдется хотя бы одно оптимальное расписание задачи $F2||C_{\max}$ среди перестановочных расписаний, т.е. расписаний с одинаковыми последовательностями n требований на каждом из двух приборов. Таким образом, при решении задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$ множество перестановок, которые следует рассматривать, – это множество всех перестановок $S = \{\pi^1, \ \pi^2, \ \dots \ \pi^{n!}\}$. Общее число возможных перестановок имеет мощность $n! = |S|$.

О п р е д е л е н и е 1. Множество перестановок $S^* \subseteq S$ будем называть решением задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$, если для любого вектора $t \in T$ множество S^* содержит хотя бы одну перестановку, которая является перестановкой Джонсона (и, следовательно, является оптимальной перестановкой) для задачи $F2||C_{\max}$ с длительностями операций, заданными вектором t.

Отсюда следует [10, 11], что множество всех перестановок S, очевидно, является решением задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$. Однако для задач с большим значением n практически невозможно выбрать решение из множества S^* большой мощности. Поэтому важно минимизировать мощность множества S^*, построенного для задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$.

О п р е д е л е н и е 2. Решение S^* будем называть минимальным решением и обозначать такое решение через $S(T)$, если любое собственное подмножество множества S^* не является решением задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$.

Построение минимального решения задачи $F2|t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U|C_{\max}$. Покажем, как можно исключить заведомо лишние перестановки из множества S. При этом будем использовать перестановочный прием, с помощью которого фиксируется некоторый порядок двух требований при условии, что для любой конкретной реализации длительностей операций найдется хотя бы одна оптимальная перестановка с таким фиксированным порядком этих требований.

Если требование j всегда должно обслуживаться раньше требования w, то порядок этих двух требований можно зафиксировать: $j \to w$. В результате такого попарного сравнения всех требований можно построить ориентированный граф $G = (N, A)$ с множеством вершин N и множеством дуг A. Будем полагать, что дуга (j, w) принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка вида $\pi_1 = (s_1, w, s_2, j, s_3) \in S$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 \| C_{\max}$ с длительностями операций, заданными вектором t.

В работе [5] доказаны следующие достаточные условия для применения перестановочного приема при указанном попарном сравнении требований.

Теорема 2. *Если выполняются соотношения $t^U_{w2} \le t^L_{w1}$ и $t^U_{j1} \le t^L_{j2}$, то для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка вида $\pi = (s_1, j, s_2, w, s_3) \in S_{12}$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 \| C_{\max}$ с вектором длительностей операций t.*

Теорема 3. Если выполняются соотношения $t^U_{j1} \le t^L_{w1}$ и $t^U_{j1} \le t^L_{j2}$, то для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка вида $\pi = (s_1, j, s_2, w, s_3) \in S_{12}$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 \| C_{\max}$ с вектором длительностей операций t.

Теорема 4. Если выполняются соотношения $t^U_{w2} \le t^L_{w1}$ и $t^U_{w2} \le t^L_{j2}$, то для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка вида $\pi = (s_1, j, s_2, w, s_3) \in S_{12}$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 \| C_{\max}$ с вектором длительностей операций t.

Заметим, что в приведенных теоремах 2-4 подпоследовательность s_2 может быть пустой, т.е. требования j и w могут располагаться подряд в перестановке Джонсона π. Если для пары требований j и w выполняются условия хотя бы одной из теорем 2, 3 или 4, то при поиске минимального решения задачи $F2 | t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} | C_{\max}$ порядок этих требований можно зафиксировать.

Отметим, что в работе [5] приведено еще два утверждения о достаточных условиях перестановочного приема, однако, как будет показано, можно ограничиться теоремами 2-4 при поиске минимального решения задачи $F2 | t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} | C_{\max}$. Фактически будет показано, что если условия ни одной из трех теорем 2, 3 или 4 не выполняются для двух требований j и w, то эти требования не сравнимы в ориентированном графе $G = (N, A)$, т.е. $(j, w) \notin A$ и $(w, j) \notin A$. Иными словами, в этом случае, согласно определениям 1 и 2, в минимальное решение задачи $F2 | t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} | C_{\max}$ должна входить хотя бы одна перестановка с порядком $j \to w$ требований j и w и хотя бы одна перестановка с порядком $w \to j$ этих требований.

Покажем, что достаточные условия теорем 2, 3 и 4 в совокупности являются необходимыми условиями применимости перестановочного приема в общем случае решения задачи $F2 | t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} | C_{\max}$.

Теорема 5. *Для того, чтобы для каждого вектора $t \in T$ существовала перестановка вида $\pi_1 = (s_1, w, s_2, j, s_3)$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 \| C_{\max}$ с длительностями операций, заданными вектором t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из трех условий:*

(a) $t_{w2}^{U} \le t_{w1}^{L}$ и $t_{j1}^{U} \le t_{j2}^{L}$,

(b) $t_{j1}^{U} \le t_{w1}^{L}$ и $t_{j1}^{U} \le t_{j2}^{L}$,

(c) $t_{w2}^{U} \le t_{w1}^{L}$ и $t_{w2}^{U} \le t_{j2}^{L}$.

Доказательство. ***Достаточность*** условий (a), (b) и (c) для применимости перестановочного приема следует из теорем 2, 3 и 4 соответственно. Полное доказательство этих теорем содержится в [5].

Необходимость. Рассмотрим все возможные варианты взаимного расположения интервалов длительностей операций для одного и того же требования на приборах 1 и 2. Эти интервалы могут либо пересекаться не более чем в одной точке, и тогда возможны два случая

$$t_{i1}^{U} \le t_{i2}^{L}; \qquad (i)$$

$$t_{i2}^{U} \le t_{i1}^{L}, \qquad (ii)$$

либо пересекаться более чем в одной точке, тогда имеет место неравенство

$$\max\{t_{i1}^{L}, t_{i2}^{L}\} < \min\{t_{i1}^{U}, t_{i2}^{U}\}. \qquad (iii)$$

Отсюда следует, что для двух требований $j \in J_{12}$ и $w \in J_{12}$ возможно 9 комбинаций взаимного расположения интервалов длительностей операций. Т.к. прибор 1 и прибор 2 симметричны, из всех комбинаций достаточно рассмотреть следующие 6 случаев: (*i*)-(*i*), (*i*)-(*ii*), (*i*)-(*iii*), (*ii*)-(*ii*), (*ii*)-(*iii*), (*iii*)-(*iii*). Будем считать, что неравенство, указанное первым, выполняется для требования $i = j$, а указанное вторым – для требования $i = w$.

Случай (*i*)-(*i*):

$$t_{j1}^{U} \le t_{j2}^{L}; \qquad (2)$$

$$t_{w1}^{U} \le t_{w2}^{L}. \qquad (3)$$

В этом случае как требование j, так и требование w принадлежат множеству N_1. Рассмотрим, когда их взаимное расположение в перестановке Джонсона может быть зафиксировано для всех векторов $t \in T$. Очевидно, что достаточно рассмотреть различные варианты взаимного расположения интервалов длительностей операций требований j и w только на приборе 1. Рассмотрим все три таких варианта.

- Если выполняется неравенство $t_{j1}^{U} \le t_{w1}^{L}$, то, рассматривая его вместе с неравенством (2), получаем условия теоремы 3. Следовательно, для любого $t \in T$ существует перестановка Джонсона, в которой эти требования следуют в порядке $j \to w$.

- Если выполняется неравенство $t_{w1}^{U} \le t_{j1}^{L}$, то, рассматривая его вместе с неравенством (3), получаем условия теоремы 3 с точностью до перемены обозначений требований j и w. Следовательно, для любого $t \in T$ существует перестановка Джонсона, в которой порядок этих требований $w \to j$.

- В случае, когда выполняется неравенство

$$\max\{t_{j1}^{L}, t_{w1}^{L}\} < \min\{t_{j2}^{U}, t_{w2}^{U}\}, \qquad (4)$$

требования j и w не сравнимы в ориентированном графе G. Чтобы убедиться в этом, покажем, что существуют такие векторы $t' \in T, t'' \in T$, что во всех перестановках Джонсона для одного вектора порядок следования этих требований $j \to w$, а во всех перестановках Джонсона для второго вектора порядок следования этих требований $w \to j$.

Действительно, пусть для вектора t' выполняются соотношения

$$\max\{t_{j1}^L, t_{w1}^L\} \le t'_{j1} < t'_{w2} \le \min\{t_{j2}^U, t_{w2}^U\},$$

а для вектора t'' выполняются соотношения

$$\max\{t_{j1}^L, t_{w1}^L\} \le t''_{j2} < t''_{w1} \le \min\{t_{j2}^U, t_{w2}^U\}.$$

В силу соотношения (4) такие векторы t' и t'' действительно можно построить. Тогда, в силу строгого неравенства (4), во всех перестановках Джонсона для вектора t' требования j и w должны быть расположены в порядке $j \to w$, а во всех перестановках Джонсона для вектора t'' требования j и w должны быть расположены в порядке $w \to j$.

Таким образом, в случае, когда помимо неравенств (2) и (3) выполняется также неравенство (4), порядок следования требований j и w во всех перестановках Джонсона зависит от конкретного вектора $t \in T$ и не может быть заранее зафиксирован для всех векторов t из многогранника T. Следовательно, в этом случае требования j и w не сравнимы в ориентированном графе $G = (N, A)$.

Заметим, что **случай (*ii*)-(*ii*)**, когда

$$t_{j2}^U \le t_{j1}^L; \tag{5}$$

$$t_{w2}^U \le t_{w1}^L, \tag{6}$$

можно рассматривать аналогично случаю (*i*)-(*i*). В результате получаем:

- при $t_{j2}^L \ge t_{w2}^U$ во всех перестановках Джонсона требования j и w расположены в порядке $j \to w$ (из неравенства $t_{j2}^L \ge t_{w2}^U$ и неравенства (5) получаем условия теоремы 4);
- при $t_{j2}^U \le t_{w2}^L$ во всех перестановках Джонсона требования j и w расположены в порядке $w \to j$ (рассматривая неравенство $t_{j2}^U \le t_{w2}^L$ и неравенство (6), получаем условия теоремы 4 с точностью до перемены обозначений требований j и w);
- при выполнении неравенства $\max\{t_{j1}^L, t_{w1}^L\} < \min\{t_{j2}^U, t_{w2}^U\}$ требования j и w не сравнимы в ориентированном графе G.

Случай (*i*)-(*ii*):

$$t_{j1}^U \le t_{j2}^L; \tag{7}$$

$$t_{w2}^U \le t_{w1}^L. \tag{8}$$

Неравенства (7) и (8) в точности соответствуют неравенствам из условия теоремы 2. Поэтому из теоремы 2 получаем, что для всех векторов $t \in T$ существуют перестановки Джонсона, в которых требования j и w расположены в порядке $j \to w$.

Случай (*i*)-(*iii*):

$$t_{j1}^{U} \le t_{j2}^{L}; \tag{9}$$

$$\max\{t_{w1}^{L}, t_{w2}^{L}\} < \min\{t_{w1}^{U}, t_{w2}^{U}\}. \tag{10}$$

Здесь требование j заведомо принадлежит множеству N_1. Следовательно, необходимо рассмотреть взаимные расположения интервалов длительностей операций на приборе 1 для обоих требований. Рассмотрим два возможных случая. Пусть выполняется неравенство

$$t_{j1}^{U} \le t_{w1}^{L}. \tag{11}$$

Если выполняется неравенство (11), то, учитывая неравенство (9), получаем условие теоремы 3. Следовательно, для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка Джонсона, в которой требования j и w следуют в порядке $j \to w$. Пусть теперь выполняется неравенство

$$t_{j1}^{U} > t_{w1}^{L}. \tag{12}$$

Покажем, что в этом случае требования j и w не сравнимы в ориентированном графе G. Для этого рассмотрим два вектора $t' \in T$ и $t'' \in T$ таких, что для вектора t' выполняются соотношения $t_{w1}^{L} \le t'_{w1} < t'_{j1} \le t_{j1}^{U}$ и $\min\{t_{w1}^{L}, t_{w2}^{L}\} \le t'_{w1} < t'_{w2} \le \max\{t_{w1}^{U}, t_{w2}^{U}\}$, а для вектора t'' – соотношения $\min\{t_{w1}^{L}, t_{w2}^{L}\} \le t'_{w2} < t'_{w1} \le \max\{t_{w1}^{U}, t_{w2}^{U}\}$ (для обоих векторов можно подобрать указанные значения компонент в силу неравенств (9) и (11)). Нетрудно убедиться в том, что все перестановки Джонсона, построенные для вектора t', должны содержать эти требования в порядке $j \to w$, а все перестановки Джонсона, построенные для вектора t'', должны содержать эти требования в порядке $w \to j$. Следовательно, в случае (*i*)-(*iii*) при выполнении неравенства (12) требования j и w не сравнимы в ориентированном графе G.

Случай (*ii*)-(*iii*)

$$t_{j2}^{U} \le t_{j1}^{L};$$

$$\max\{t_{w1}^{L}, t_{w2}^{L}\} < \min\{t_{w1}^{U}, t_{w2}^{U}\}.$$

Этот случай аналогичен случаю (*i*)-(*iii*) при замене в рассуждениях теоремы 3 на теорему 4. В результате получаем: если $t_{w2}^{L} \ge t_{j2}^{U}$, то для каждого вектора $t \in T$ существует перестановка Джонсона, в которой требования j и w расположены в последовательности $w \to j$; если $t_{w2}^{L} < t_{j2}^{U}$, то требования j и w не сравнимы в ориентированном графе G.

Случай (*iii*)-(*iii*):

$$\max\{t_{j1}^{L}, t_{j2}^{L}\} < \min\{t_{j1}^{U}, t_{j2}^{U}\}; \tag{13}$$

$$\max\{t_{w1}^{L}, t_{w2}^{L}\} < \min\{t_{w1}^{U}, t_{w2}^{U}\}. \tag{14}$$

Таблица 1. Упорядочение двух требований

Возможные расположения отрезков $\left[t_{j1}^L,t_{j1}^U\right]$ и $\left[t_{j2}^L,t_{j2}^U\right]$ / Возможные расположения отрезков $\left[t_{j1}^L,t_{j1}^U\right]$ и $\left[t_{j2}^L,t_{j2}^U\right]$	$t_{j1}^U \le t_{j2}^L$	$t_{j2}^U \le t_{j1}^L$	$\max\left\{t_{j1}^L,t_{j2}^L\right\} < \min\left\{t_{j1}^U,t_{j2}^U\right\}$
$t_{w1}^U \le t_{w2}^L$	При $t_{j1}^U \le t_{w1}^L$ порядок фиксирован: $j \to w$ (по теореме 3). При $t_{w1}^U \le t_{j1}^L$ порядок фиксирован: $w \to j$ (по теореме 3). При $\max\left\{t_{j1}^L,t_{w1}^L\right\} < \min\left\{t_{j1}^U,t_{w1}^U\right\}$ требования j и w не сравнимы.	Порядок фиксирован: $w \to j$ (по теореме 2).	При $t_{w1}^U \le t_{j1}^L$ порядок фиксирован: $w \to j$ (по теореме 3). При $t_{j1}^L < t_{w1}^U$ требования j и w не сравнимы.
$t_{w2}^U \le t_{w1}^L$	Порядок фиксирован: $j \to w$ (по теореме 2).	При $t_{j2}^U \le t_{w2}^L$ порядок фиксирован: $w \to j$ (по теореме 4). При $t_{w2}^U \le t_{j2}^L$ порядок фиксирован: $j \to w$ (по теореме 4). При $\max\left\{t_{j2}^L,t_{w2}^L\right\} < \min\left\{t_{j2}^U,t_{w2}^U\right\}$ требования не сравнимы.	При $t_{w2}^U \le t_{j2}^L$ порядок фиксирован: $j \to w$ (по теореме 4). При $t_{j2}^L < t_{w2}^U$ требования j и w не сравнимы.
$\max\left\{t_{w1}^L,t_{w2}^L\right\} < \min\left\{t_{w1}^U,t_{w2}^U\right\}$	При $t_{j1}^U \le t_{w1}^L$ порядок фиксирован: $j \to w$ (по теореме 3). При $t_{w1}^L < t_{j1}^U$ требования j и w не сравнимы.	При $t_{j2}^U \le t_{w2}^L$ порядок фиксирован: $w \to j$ (по теореме 4). При $t_{w2}^L < t_{j2}^U$ требования j и w не сравнимы.	Требования j и w не сравнимы.

Покажем, что в этом случае требования j и w не сравнимы в ориентированном графе $G = (N, A)$. Действительно, пусть для вектора $t' = (t'_{11}, t'_{12}, ..., t'_{n2})$ выполняются оба соотношения

$$\max\{t^L_{j1}, t^L_{j2}\} \le t'_{j1} < t'_{j2} \le \min\{t^U_{j1}, t^U_{j2}\}; \tag{15}$$

$$\max\{t^L_{w1}, t^L_{w2}\} \le t'_{w2} < t'_{w1} \le \min\{t^U_{w1}, t^U_{w2}\}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что в случае выполнения неравенств (13) и (14) всегда можно найти такие значения $t'_{j1}, t'_{j2}, t'_{w1}, t'_{w2}$, чтобы соотношения (15) и (16) выполнялись. Тогда в перестановке Джонсона для вектора t' требования j и w будут расположены в порядке $j \to w$ (согласно правилу Джонсона, поскольку $j \in N_1$ и $w \in N_2$), причем, в силу строгих неравенств в соотношениях (15) и (16), такой порядок должен сохраняться для всех перестановок Джонсона, построенных для вектора t'.

Пусть теперь для вектора $t'' = (t''_{11}, t''_{12}, ..., t''_{n1}, t''_{n2})$ выполняются оба соотношения

$$\max\{t^L_{j1}, t^L_{j2}\} \le t''_{j2} < t''_{j1} \le \min\{t^U_{j1}, t^U_{j2}\}; \tag{17}$$

$$\max\{t^L_{w1}, t^L_{w2}\} \le t''_{w1} < t''_{w2} \le \min\{t^U_{w1}, t^U_{w2}\}. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае можно найти такие значения $t'_{j1}, t'_{j2}, t'_{w1}, t'_{w2}$, что соотношения (17) и (18) действительно будут выполняться. Также нетрудно убедиться в том, что во всех перестановках Джонсона, построенных для вектора t'', требования j и w будут расположены в порядке $w \to j$.

Таким образом, порядок следования требований j и w в перестановке Джонсона зависит от конкретного выбора вектора из множества T, и не может быть заранее зафиксирован для всех векторов из множества T. Следовательно, такие требования j и w в случае (*iii*)-(*iii*) являются несравнимыми в ориентированном графе G.

Итак, доказано, что в каждом из рассмотренных случаев можно либо упорядочить требования j и w (если выполняется одно из условий (a), (b), (c)), либо показать, что эти требования не сравнимы в ориентированном графе G (если ни одно из условий (a), (b), (c) не выполняется). Все рассмотренные случаи представлены в табл. 1. ■

В заключение отметим, что решение поставленной задачи в завершенной форме стало возможным благодаря постоянному вниманию к работе со стороны доктора физико-математических наук, профессора Сотскова Ю.Н.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Allahverdi A.*** // Computers & Operations Research 24, 955-960, 1997.
2. ***Allahverdi A.*** // Journal of the Operational Research Society 46, 896-904, 1995.
3. ***Allahverdi A., Mittenthal J.*** // European Journal of Operational Research, 81, – p. 376-387, 1995.
4. ***Allahverdi A., Mittenthal J.*** // Mathematical and Computer Modeling 20, 9-17, 1994.
5. ***Allahverdi A., Sotskov Y.N.*** // International Transactions in Operational Research, 10, 65-76. 2003,
6. ***Elmaghraby S., Thoney K.A.*** // IIE Transactions 31, 467-477, 2000.
7. ***Ishii H., Masuda T., Nishida T.*** // Discrete Appl. Math. 17, 29-38, 1987.
8. ***Johnson S.M.*** // Naval Research Logistics Quarterly, 1, 61-68, 1954
9. ***Ku P.S., Niu S.C.*** // Operation Research, 34, 130-136, 1986
10. ***Lai T.C., Sotskov Y.N.*** // Journal of the Operational Research Society, 50, 230-243, 1999.

11. ***Lai T.C., Sotskov Y.N., Sotskova N.Y., Werner F.*** // Mathematical and Computer Modeling 26, 67-86, 1997.
12. ***Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Shmoys D.B.*** In Logistics of Production and Inventory. Graves S.S., Rinnooy Kan A.H.G., Zipkin P. (eds), North-Holland, New York, 445-522, 1993.
13. ***Strusevich V.A.*** // Discrete Appl. Math. 59, 75-86, 1995.
14. ***Танаев В.С., Шкурба В.В.*** Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256 с.

SUMMARY

The article deals with flow shop scheduling problem to minimize makespan where jobs have random and bounded processing times. Necessary and sufficient conditions to construct minimal solution are found.