УДК 519.8

Н.М. ЛЕЩЕНКО, Ю.Н. СОТСКОВ

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПЕРЕСТАНОВКИ С ДВУМЯ ПЕРВЫМИ КОНФЛИКТНЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ

Введение

Рассмотрим обслуживающую систему, состоящую из двух приборов $M = \{1, 2\}$, которые должны обслужить n требований $J = \{1, 2, ..., n\}$ с одинаковыми технологическими маршрутами: $(1, 2)$ (требование $j \in J$ вначале обслуживается прибором $1 \in M$, а затем – прибором $2 \in M$). Прерывания операций запрещены. Предполагается, что на момент составления расписания длительность выполнения операции t_{jm} требования $j \in J$ прибором $m \in M$ не определена, т.е. при реализации расписания случайная величина t_{jm} может принимать любое действительное значение между заданными верхней границей t^U_{jm} и нижней границей t^L_{jm}. Множество всех допустимых векторов $t = (t_{11}, t_{12}, ..., t_{n1}, t_{n2})$ длительностей операций обозначим через Δ:

$$\Delta = \left\{ t \middle| t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm}, j \in J, m \in M \right\}.$$

Пусть $C_j(\pi)$ обозначает момент завершения обслуживания требования $j \in J$ при расписании π. Для такой задачи минимизации длины расписания

$$C_{\max} = \max_{\pi} \left\{ C_j(\pi) \mid j \in J \right\}$$

будем использовать обозначение $F2 \mid t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} \mid C_{\max}$. В случае, когда

$t_{jm}^{L} = t_{jm}^{U}$ для всех $j \in J$ и $m \in M$, эта задача превращается в классическую задачу Джонсона [2], обозначаемую $F2 \,||\, C_{\max}$. В работе [2] было доказано, что множество S перестановочных расписаний (т.е. расписаний с одинаковым порядком обслуживания требований каждым прибором) содержит хотя бы одно оптимальное расписание для задачи $F2 \,||\, C_{\max}$, и был предложен полиномиальный алгоритм построения оптимальной перестановки (будем называть ее перестановкой Джонсона). Следует отметить, что оптимальное расписание для задачи $F2 \,||\, C_{\max}$ может определяться и перестановкой, которая не является перестановкой Джонсона.

В работе [3] было доказано, что среди перестановочных расписаний содержится хотя бы одно оптимальное расписание для системы обслуживания с двумя приборами и случайными длительностями операций. Поскольку предполагается, что t_{jm} – случайная величина, то множество перестановочных расписаний содержит хотя бы одно оптимальное расписание для задачи $F2 \,|\, t_{jm}^{L} \le t_{jm} \le t_{jm}^{U} \,|\, C_{\max}$.

Минимальное множество доминирующих расписаний

В случае, когда длительности операций принимают случайные значения, может не существовать единственного расписания, которое остается оптимальным при любых возможных реализациях длительностей операций. Поэтому будем рассматривать минимальное по включению множество доминирующих перестановок $S^{*} \subseteq S$, среди которых содержится хотя бы одна оптимальная перестановка (расписание) для каждого вектора допустимых значений длительностей операций (заметим, что множество S имеет мощность $|S| = n!$). Такой подход к решению задач с неопределенными длительностями операций был предложен в работе [4].

Определение. *Множество перестановок $S^{*} \subseteq S$ будем называть решением задачи $F2 \,|\, t_{jm}^{L} \le t_{jm} \le t_{jm}^{U} \,|\, C_{\max}$, если для любого допустимого вектора $t \in \Delta$ длительностей операций множество S^{*} содержит хотя бы одну оптимальную перестановку π^{t} для задачи $F2 \,||\, C_{\max}$ с длительностями операций, заданными вектором t, причем любое собственное подмножество множества S^{*} не является решением задачи $F2 \,|\, t_{jm}^{L} \le t_{jm} \le t_{jm}^{U} \,|\, C_{\max}$.*

Для уменьшения мощности множества доминирующих перестановок будем исключать из множества S заведомо лишние расписания. В частности, с помощью перестановочного приема можно зафиксировать оптимальный порядок двух требований при условии, что найдется хотя бы одна оптимальная перестановка с таким порядком этих требований. В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема [1]. *Порядок двух требований $u \in J$ и $v \in J$ может быть зафиксирован в некотором решении S^{*} задачи $F2 \,|\, t_{jm}^{L} \le t_{jm} \le t_{jm}^{U} \,|\, C_{\max}$, если для этих требований выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$t_{v2}^{U} \le t_{v1}^{L} \text{ и } t_{u1}^{U} \le t_{u2}^{L}, \tag{1}$$

$$t_{u1}^{U} \le t_{v1}^{L} \text{ и } t_{u1}^{U} \le t_{u2}^{L}, \tag{2}$$

$$t_{v2}^{U} \le t_{v1}^{L} \text{ и } t_{v2}^{U} \le t_{u2}^{L}. \tag{3}$$

Если в приведенном определении решения S^{*} дополнительно потребовать, чтобы перестановка π^{t} была перестановкой Джонсона, то условия (1)-(3)

становятся необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы порядок требований $u \in J$ и $v \in J$ можно было зафиксировать $u \to v$, т.е. в оптимальном расписании требование u должно быть обслужено раньше требования v. (Соответствующее утверждение доказано в [5].) После проверки пар неравенств (1), (2) и (3) можно определить (частичный) строгий порядок на множестве требований J.

Если для пары требований u и v выполняется хотя бы одно из условий (1), (2) или (3), тогда в решении S^* задачи $F2 | t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U | C_{\max}$ можно зафиксировать порядок этих двух требований следующим образом: $u \to v$. Это означает, что для каждого вектора $t \in \Delta$ существует перестановка вида $\pi = (s_1, u, s_2, v, s_3) \in S$, которая является перестановкой Джонсона для задачи $F2 || C_{\max}$ с вектором длительностей операций t. Чем больше требований вовлечено в этот строгий порядок, тем больше перестановок можно удалить из множества S.

Пусть ни одно из условий теоремы не выполняется для порядка требований $u \to v$, и при этом не выполняются аналогичные условия для противоположного порядка $v \to u$. Тогда (в соответствии с определением) в решение S^* задачи $F2 | t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U | C_{\max}$ необходимо включить хотя бы одну перестановку с порядком $u \to v$ этих требований и хотя бы одну перестановку, в которой эти требования располагаются в порядке $v \to u$. Будем говорить, что такие требования u и v являются конфликтными.

Если конфликтные требования отсутствуют, т.е. все требования из множества J линейно упорядочены, то получаем единственную перестановку, которая является оптимальной для любой допустимой реализации длительностей операций. Критерий существования одноэлементного решения S^*, $|S^*| = 1$, задачи $F2 | t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U | C_{\max}$ получен в работе [6].

В следующем разделе рассматривается частный случай задачи $F2 | t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U | C_{\max}$, состоящий в том, что решение S^* содержит всего две перестановки, $|S^*| = 2$, причем конфликтными являются два первых требования в этих перестановках.

Достаточные условия оптимальности перестановки

Пусть конфликтными являются только два первых требования в последовательности n требований. Тогда построенное решение S^* задачи $F2 | t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U | C_{\max}$ содержит две перестановки (не нарушая общности, предположим, что это перестановки $\pi_1 = (1, 2, 3, ..., n)$ и $\pi_2 = (2, 1, 3, 4, ..., n)$). Для практической реализации расписания необходимо выбрать единственную перестановку, и, следовательно, необходимо упорядочить требования 1 и 2 в момент времени $\tau = 0$. Для этого построим активные расписания, определяемые перестановками π_1 и π_2, и сравним их между собой.

Будем обозначать через t_{jm}^0 – момент начала, а через $\bar{t}_{jm}$ – момент завершения выполнения операции O_{jm}. Найдем момент наиболее раннего возможного начала операции O_{32} в расписаниях π_1 и π_2. Для расписания π_1 получаем

$$t_{32}^0(\pi_1) = \max\{\bar{t}_{31}(\pi_1); \bar{t}_{22}(\pi_1)\},$$

где

$$\bar{t}_{31}(\pi_1) = t_{11} + t_{21} + t_{31};$$
$$\bar{t}_{22}(\pi_1) = t_{22}^0(\pi_1) + t_{22} = \max\{\bar{t}_{21}(\pi_1); \bar{t}_{12}(\pi_1)\} + t_{22} =$$
$$= \max\{t_{11} + t_{21}; t_{12}^0(\pi_1) + t_{12}\} + t_{22} = \max\{t_{11} + t_{21}; t_{11} + t_{12}\} + t_{22} =$$
$$= t_{11} + \max\{t_{21}; t_{12}\} + t_{22}.$$

Следовательно,

$$t_{32}^0(\pi_1) = \max\{t_{11} + t_{21} + t_{31}; t_{11} + t_{22} + \max\{t_{21}; t_{12}\}\}.$$

Аналогично для расписания π_2 получаем равенства:

$$t_{32}^0(\pi_2) = \max\{\bar{t}_{31}(\pi_2); \bar{t}_{12}(\pi_2)\} = \max\{t_{11} + t_{21} + t_{31}; t_{12} + t_{21} + \max\{t_{11}; t_{22}\}\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$T = t_{11} + t_{21} + t_{31},$$
$$T_1 = t_{11} + t_{22} + \max\{t_{21}; t_{12}\},$$
$$T_2 = t_{12} + t_{21} + \max\{t_{11}; t_{22}\}.$$

Необходимо сравнить две величины: $t_{32}^0(\pi_1) = \max\{T; T_1\}$ и $t_{32}^0(\pi_2) = \max\{T; T_2\}$.

Поскольку упорядочение требований 1 и 2 должно происходить при отсутствии информации о реализации расписания, то вместо неизвестных величин T, T_1 и T_2 в дальнейших рассуждениях будем использовать их верхние и нижние оценки T^U, T^L, T_1^U, T_1^L, T_2^U, T_2^L:

$$T^L \le T \le T^U, \; T_1^L \le T_1 \le T_1^U, \; T_2^L \le T_2 \le T_2^U.$$

Могут представиться следующие возможности.

При $T_1^U \le T_2^L$ оптимальной перестановкой для любого вектора $t \in \Delta$ является π_1, поскольку

– при $\max\{T; T_1\} = T_1$ (т.е. если $T < T_1$) получаем

$$T < T_1 = t_{32}^0(\pi_1) \le T_2 = t_{32}^0(\pi_2), \text{ и } t_{32}^0(\pi_1) \le t_{32}^0(\pi_2);$$

– при $\max\{T; T_1\} = T$ (т.е. если $T \ge T_1$) получаем

- либо $T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) \le T_2 = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) \le t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_1 \le T_2 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$.

Во всех рассмотренных случаях выполняется неравенство $t_{32}^0(\pi_1) \le t_{32}^0(\pi_2)$. Следовательно, перестановка π_1 не увеличивает длину расписания $C_{\max}$.

При $T_2^U \le T_1^L$ оптимальной перестановкой для любого вектора $t \in \Delta$ является π_2, поскольку

– при $\max\{T; T_2\} = T_2$ (т.е. если $T < T_2$) получаем

$$T < T_2 = t_{32}^0(\pi_2) \le T_1 = t_{32}^0(\pi_1), \text{ и } t_{32}^0(\pi_2) \le t_{32}^0(\pi_1);$$

– при $\max\{T;T_2\}=T$ (т.е. если $T \ge T_2$) получаем

- либо $T_2 \le T = t_{32}^0(\pi_2) \le T_1 = t_{32}^0(\pi_1)$, и $t_{32}^0(\pi_2) \le t_{32}^0(\pi_1)$;
- либо $T_2 \le T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$.

Следовательно, перестановка π_2 не увеличивает значение $C_{\max}$.

При $T_1^U \le T^L$ оптимальной перестановкой для любого вектора $t \in \Delta$ является π_1, поскольку

- либо $T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = T_2 = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_2 \le T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) \le T_2 = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) \le t_{32}^0(\pi_2)$.

Следовательно, перестановка π_1 не увеличивает значение $C_{\max}$.

При $T_2^U \le T^L$ оптимальной перестановкой для любого вектора $t \in \Delta$ является π_2, поскольку

- либо $T_1 \le T_2 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_2 \le T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_2 \le T = t_{32}^0(\pi_2) \le T_1 = t_{32}^0(\pi_1)$, и $t_{32}^0(\pi_2) \le t_{32}^0(\pi_1)$.

Следовательно, перестановка π_2 не увеличивает значение $C_{\max}$.

При $T_1^U \le T^L$ и $T_2^U \le T^L$ обе перестановки π_1 и π_2 являются оптимальными для любого вектора $t \in \Delta$, поскольку

- либо $T_1 \le T_2 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$;
- либо $T_2 \le T_1 \le T = t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$, и $t_{32}^0(\pi_1) = t_{32}^0(\pi_2)$.

Следовательно, обе перестановки дают одинаковое значение $C_{\max}$.

Для вычисления величин T^U, T^L, T_1^U, T_1^L, T_2^U, T_2^L достаточно найти значение следующих выражений:

$$\begin{aligned}
T^U &= t_{11}^U + t_{21}^U + t_{31}^U, & T^L &= t_{11}^L + t_{21}^L + t_{31}^L,\\
T_1^U &= t_{11}^U + t_{22}^U + \max\{t_{12}^U; t_{21}^U\}, & T_1^L &= t_{11}^L + t_{22}^L + \max\{t_{12}^L; t_{21}^L\},\\
T_2^U &= t_{12}^U + t_{21}^U + \max\{t_{11}^U; t_{22}^U\}, & T_2^L &= t_{12}^L + t_{21}^L + \max\{t_{11}^L; t_{22}^L\}.
\end{aligned}$$

Найдем достаточные условия оптимальности одной из рассматриваемых перестановок π_1 и π_2.

Рассмотрим неравенство $T_1^U \le T_2^L$. Оно равносильно неравенству

$$t_{11}^U + t_{22}^U + \max\{t_{12}^U; t_{21}^U\} \le t_{12}^L + t_{21}^L + \max\{t_{11}^L; t_{22}^L\}. \tag{4}$$

Возможны следующие четыре случая:

1) $\max\{t_{12}^U; t_{21}^U\} = t_{21}^U$, $\max\{t_{11}^L; t_{22}^L\} = t_{11}^L$, тогда из (4) получаем $t_{22}^U \le t_{12}^L$;

2) $\max\{t_{12}^U; t_{21}^U\} = t_{21}^U$, $\max\{t_{11}^L; t_{22}^L\} = t_{22}^L$, тогда из (4) получаем $t_{11}^U \le t_{12}^L$;

3) $\max\{t_{12}^U;t_{21}^U\}=t_{12}^U$, $\max\{t_{11}^L;t_{22}^L\}=t_{11}^L$, тогда из (4) получаем $t_{22}^U \le t_{21}^L$;

4) $\max\{t_{12}^U;t_{21}^U\}=t_{12}^U$, $\max\{t_{11}^L;t_{22}^L\}=t_{22}^L$, тогда из (4) получаем $t_{11}^U \le t_{21}^L$.

Замечание. В каждом из рассмотренных случаев взаимно уничтожались верхняя и нижняя границы длительности одной и той же операции. Эта возможность обусловлена тем, что при реализации расписания верхняя и нижняя границы заменяются вполне конкретной величиной рассматриваемой длительности операции.

Таким образом, получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Перестановка π_1 является оптимальной перестановкой для любой допустимой реализации длительностей операций, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$\begin{array}{lll} t_{12}^U \le t_{21}^U, & t_{11}^L \ge t_{22}^L, & t_{22}^U \le t_{12}^L; \\ t_{12}^U \le t_{21}^U, & t_{11}^L \le t_{22}^L, & t_{11}^U \le t_{12}^L; \\ t_{12}^U \ge t_{21}^U, & t_{11}^L \ge t_{22}^L, & t_{22}^U \le t_{21}^L; \\ t_{12}^U \ge t_{21}^U, & t_{11}^L \le t_{22}^L, & t_{11}^U \le t_{21}^L. \end{array}$$

Заметим, что если рассматривать исходное неравенство (4), то лемма 1 принимает следующий вид.

Лемма 2. *Перестановка π_1 является оптимальной перестановкой для любой допустимой реализации длительностей операций, если выполняется следующее неравенство:*

$$t_{11}^U + t_{22}^U + \max\{t_{12}^U;t_{21}^U\} \le t_{12}^L + t_{21}^L + \max\{t_{11}^L;t_{22}^L\}.$$

Аналогично можно рассмотреть неравенство $T_2^U \le T_1^L$, т.е. неравенство $t_{12}^U + t_{21}^U + \max\{t_{11}^U;t_{22}^U\} \le t_{11}^L + t_{22}^L + \max\{t_{12}^L;t_{21}^L\}$ и получить соответствующие результаты.

Рассмотрим неравенство $T_1^U \le T^L$ в следующем виде:

$$t_{11}^U + t_{22}^U + \max\{t_{12}^U;t_{21}^U\} \le t_{11}^L + t_{21}^L + t_{31}^L. \tag{5}$$

Из условия (5) в силу замечания получаем неравенство

$$t_{22}^U + \max\{t_{12}^U;t_{21}^U\} \le t_{21}^L + t_{31}^L,$$

откуда следует неравенство

$$t_{22}^U + \max\{t_{12}^U - t_{21}^L;t_{21}^U - t_{21}^L\} \le t_{31}^L.$$

Далее в силу замечания, получаем следующее неравенство

$$t_{22}^U + \max\{0;t_{12}^U - t_{21}^L\} \le t_{31}^L.$$

В случае, когда $t_{12}^U - t_{21}^L \le t_{21}^U - t_{21}^L$, получаем неравенство $t_{12}^U \le t_{21}^U$, и поэтому достаточно рассмотреть соотношение $t_{22}^U \le t_{31}^L$, т.е. и в этом случае в качестве величины $t_{21}^U - t_{21}^L$ можно взять 0. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Перестановка π_1 является оптимальной перестановкой для любой допустимой реализации длительностей операций, если выполняется условие*

$$t_{22}^U + \max\{0; t_{12}^U - t_{21}^L\} \le t_{31}^L.$$

Аналогом последней леммы при использовании неравенства (5) является

Лемма 4. *Перестановка π_1 является оптимальной перестановкой для любой допустимой реализации длительностей операций, если выполняется следующее неравенство*

$$t_{11}^U + t_{22}^U + \max\{t_{12}^U; t_{21}^U\} \le t_{11}^L + t_{21}^L + t_{31}^L.$$

Аналогично можно рассматривать неравенство $T_2^U \le T^L$. Комбинируя результаты для перестановок π_1 и π_2, получаем достаточное условие того, что каждая из перестановок является оптимальной, т.е. одноэлементное множество $\{\pi_1\}$ (множество $\{\pi_2\}$) является решением задачи $F2 \mid t_{jm}^L \le t_{jm} \le t_{jm}^U \mid C_{\max}$.

Лемма 5. *Обе перестановки π_1 и π_2 являются оптимальными для любой допустимой реализации длительностей операций, если выполняется условие*

$$t_{12}^U + t_{22}^U \le t_{31}^L.$$

Действительно, неравенство (5) и соответствующее неравенство для перестановки π_2 заведомо выполняются, если имеет место неравенство

$$t_{11}^U + t_{22}^U + t_{12}^U + t_{21}^U \le t_{11}^L + t_{21}^L + t_{31}^L.$$

В силу замечания, получаем неравенство

$$t_{12}^U + t_{22}^U \le t_{31}^L.$$

Если выполняется условие леммы 5, тогда порядок требований 1 и 2 в оптимальном расписании может быть произвольным. Если условие леммы 5 не выполняется, тогда при выполнении условий одной из лемм 1-4 можно зафиксировать порядок требований 1 и 2.

Таким образом, если условия одной из перечисленных лемм выполняются, тогда перестановка π_1 или (и) π_2 является оптимальной для рассматриваемой задачи при любых допустимых реализациях длительностей операций. Следует отметить, что оптимальные перестановки, построенные согласно леммам 1-5, являясь оптимальными для всех возможных значений длительностей операций, могут не для всех значений длительностей операций быть перестановками Джонсона.

Если ни одно из приведенных достаточных условий не выполняется, то можно отдать предпочтение одному из конкурирующих расписаний на основании некоторых дополнительных соглашений. Например, можно выбирать такое расписание, которое гарантирует наименьший проигрыш для оптимального значения $C_{\max}$ в худшем из возможных случаев.

Заключение

Доказанные леммы 1-5 можно обобщить на случай, когда $|S^*| = 2$, но конфликтные требования не являются первыми в оптимальной перестановке n требований. Нетрудно видеть, что в случае $|S^*| = 2$ конфликтные требования j и k должны следовать одно за другим $(..., j, k, ...)$. Следует отметить, что в этом случае можно рассматривать и оперативный режим выбора оптимальной перестановки, заключающийся в том, что начальная часть расписания уже реализована, и, следовательно, неопределенные длительности операций, предшествующих операции j, приобрели конкретные значения. В случае оперативного режима можно доказать достаточные условия оптимальности перестановки, для которых нет аналогов для случая двух первых конфликтных требований, рассмотренной в предыдущем разделе.

Результаты, полученные в данной работе, естественным образом можно обобщить также на случай задачи $J2 \mid t^L_{jm} \le t_{jm} \le t^U_{jm} \mid C_{\max}$, т. е. на случай многостадийной системы с различными технологическими маршрутами обслуживания требований.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Allahverdi, A., Yu.N. Sotskov.*** Two-machine flowshop minimum-length scheduling problem with random and bounded processing times // International Transactions in Operational Research. – 2003. – № 10. – P. 65-76.
2. ***Johnson, S.M.*** Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistics Quarterly. – 1954. – № 1. – P. 61-68.
3. ***Ku, P.S., S.C. Niu.*** On Johnson's two-machine flow-shop with random processing times // Operations Research. – 1986. – № 34. – P. 130-136.
4. ***Lai, T.-C., Yu.N. Sotskov.*** Sequencing with uncertain numerical data for makespan minimization // Journal of the Operational Research Society. – 1999. – № 50. – P. 230-243.
5. ***Лещенко Н.М.*** Минимальное решение для поточной системы обслуживания с неопределенными длительностями операций и критерием минимизации общего времени // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2004. – № 1. – С. 127-136.
6. ***Лещенко Н.М., Сотсков Ю.Н.*** Оптимальные по быстродействию расписания обслуживания двумя последовательными приборами n требований с неопределенными длительностями операций. – Препринт ОИПИ НАНБ. – 2003. – 40 с.

SUMMARY

Two-machine flow-shop scheduling problem of minimizing make span is considered for the case when only lower and upper bounds of job processing time are known before scheduling. Sufficient conditions for permutation optimality are proven for the case when minimal set of schedules consists of only two permutations and first two jobs are in conflict.