

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИШЕРА И БЕЛОУСОВА-ЖАБОТИНСКОГО

Известно [1], что с точки зрения математики волны представляют собой нестационарные векторные поля, т.е. $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{x})$, где $\vec{V} \in R^n$, $\vec{x} \in R^m$, $t \in (-\infty, \infty)$. В общем случае волны можно рассматривать как суперпозицию двух нестационарных векторных полей: поля $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{y})$, $\vec{y} \in R^k$ и поля:

$$\vec{y} = \vec{\Omega}(t, \vec{x}), \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix},$$

так что волны $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{x})$ принимают вид

$$\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{\Omega}(t, \vec{x})).$$

Из этого выражения следует, что произвольная волна может рассматриваться как суперпозиция волн, зависящих только от единственной фазовой переменной ω . Такие волны называются простыми. Они имеют вид

$$\vec{V} = \vec{V}(t, \omega(t, \vec{x})).$$

Если $\omega(t, \vec{x}) = \alpha t + \sum_{k=1}^l \beta_k x_k + c$, где α, β_k, c – произвольные действительные

числа, то волна называется плоской. Многомерная плоская уединенная волна является естественным обобщением уединенных волновых решений одномерного случая, когда

$$\omega(t, x) = \alpha t + \beta x + c.$$

Анализ современной теории волн [2] показывает, что достаточно широкий класс волн представляет собой суперпозицию простых плоских волн и, в частности, дробно-рациональные функции от соответствующих экспонент, аргументы которых являются простыми плоскими волнами. В качестве примеров можно привести классические уравнения нелинейной физики Шредингера, КДФ, Буссинеска, Кадомцева-Петвиашвили, Дэви-Стьюартсона, Фишера, Белоусова-Жаботинского. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующий математический принцип построения многомерных плоских волн.

С-принцип. Если известно, что волновое дифференциальное уравнение или волновая система в частных производных имеет решение в виде одномерной уединенной плоской волны или суперпозиции одномерных плоских волн, то всегда можно построить многомерную волну (по крайней мере плоскую) или суперпозицию плоских многомерных волн, которая является решением многомерного дифференциального уравнения или системы.

Для этого достаточно в функциональной форме одномерной уединенной волны заменить фазовую переменную $\omega(t, x) = \alpha t + \beta x + c$ на

$$\omega(t, \bar{x}) = \alpha t + \sum_{k=1}^l \beta_k x_k + c.$$

Тогда для волн, имеющих дробно-рациональную структуру от соответствующих экспонент (или других линейно независимых функций) система дисперсионных уравнений для многомерной плоской волны с точностью до обозначений совпадает с системой дисперсионных уравнений одномерной волны, разрешимость которой уже известна. Поэтому сформулированный принцип позволяет исследовать широкий класс многомерных уравнений нелинейной физики и их систем.

Рассмотрим многомерное уравнение Фишера

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} = Au + \sum_{i=1}^l r_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu^2, \quad (1)$$

где p_0, A, r_i, q_{ij}, B – произвольные действительные числа. Отметим, что классическое уравнение Фишера или уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова имеет вид [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A u(u-1) + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad A, B > 0.$$

Решение уравнения (1) будем строить в виде (ср. с [3]):

$$u(t, \bar{x}) \equiv u(\xi) = \lambda(k_0 + k_1 e + k_2 e^2)^{-1}, \quad \xi = \alpha_0 t + \sum_{k=1}^l \alpha_k x_k + \varphi, \quad e \equiv e(\xi), \quad (2)$$

где λ, k_0, k_1, k_2 – произвольные положительные числа, $\alpha_0, \alpha_k, \varphi$ – произвольные действительные числа, характеризующие искомую волну. Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях e , получим следующие дисперсионные соотношения:

$$A k_0 + B \lambda = 0, \quad p_0 \alpha_0 = I_1 + I_2 - A, \quad k_1^2 = 4 k_0 k_2, \quad A = 6 I_2, \quad (3)$$

$$I_1 \equiv \sum_{i=1}^l r_i \alpha_i, \quad I_2 \equiv \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \alpha_i \alpha_j.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (3).

Нетрудно видеть, что при $\xi \rightarrow \pm\infty$ граничные условия имеют вид

$$u(\xi)|_{\xi \rightarrow +\infty} = 0, \quad u(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} = \frac{\lambda}{k_0} > 0. \quad (4)$$

Решение (2) уравнения (1) с граничными условиями (4) отвечает распространяющейся с постоянной скоростью волне горения [4]. Чтобы найти эту скорость положим, что $n = 3$ и преобразуем переменную ξ следующим образом:

$$\xi = \alpha_0 t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \varphi = I [\alpha_0 I^{-1} t + \alpha_1 I^{-1} x_1 + \alpha_2 I^{-1} x_2 + \alpha_3 I^{-1} x_3 + \varphi I^{-1}],$$

$$I \equiv \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Тогда величины $\alpha_1 I^{-1}, \alpha_2 I^{-1}, \alpha_3 I^{-1}$ будут представлять собой направляющие косинусы нормали к фронту волны [5]. Фронт волны перемещается в пространстве оставаясь перпендикулярным вектору $\vec{n} = (\alpha_1 I^{-1}, \alpha_2 I^{-1}, \alpha_3 I^{-1})$. Его скорость равна $\alpha_0 I^{-1}$ [5].

Опишем процедуру «длинноволнового» предельного перехода [6] для построения рациональных решений уравнения (1). Заметим, что решение (2) допускает выход на комплексную плоскость, т.е. можно положить, что $\varphi = \pi i, i = \sqrt{-1}$. Кроме того, для удобства вычислений будем считать, что $p_0 = k_0 = k_2 = 1, k_1 = 2$. Для осуществления «длинноволнового» предельного перехода положим, что $\alpha_k = \alpha d_k, k = \overline{1, l}$, где α – малый параметр, d_k – произвольные действительные числа, и из уравнений (3) найдем соотношения, необходимые для построения рационального решения:

$$\lambda = -6\alpha^2 \tilde{I}_2 B^{-1}, \quad \alpha_0 = \alpha \tilde{I}_1 - 5\alpha^2 \tilde{I}_2, \quad \tilde{I}_1 \equiv \sum_{i=1}^l r_i d_i, \quad \tilde{I}_2 \equiv \sum_{i,j=1}^l q_{ij} d_i d_j. \quad (5)$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в решении (2) с учетом (5), получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{6\alpha^2 \tilde{I}_2}{B} \right) \left[1 - \exp \left\{ (\alpha \tilde{I}_1 - 5\alpha^2 \tilde{I}_2)t + \alpha \sum_{k=1}^l d_k x_k \right\} \right]^{-2} = -\frac{6\tilde{I}_2}{B} \left[\tilde{I}_1 t + \sum_{k=1}^l d_k x_k \right]^{-2}. \quad (6)$$

Прямым вычислением проверяется, что выражение (6) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^l r_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B u^2. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива:

Теорема 2. Уравнение (7) имеет рациональное решение вида (6).

Полученный результат дополняет список уравнений в частных производных, приведенный в справочнике [7], которые имеют точные решения.

Известно [3], что в одномерном случае уравнение Фишера допускает решение, содержащееся в семействе решений вида

$$u(t, \vec{x}) \equiv u(\xi) = \lambda_1 (1 + e)^{-1} + \lambda_2 (1 + e)^{-2}, \quad e \equiv \exp(\xi), \quad \xi \equiv \alpha_0 t + \sum_{k=1}^l \alpha_k x_k + \varphi, \quad (8)$$

где λ_1, λ_2 – произвольные действительные числа. Подставляя (8) в (1), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} A + B(\lambda_1 + \lambda_2) &= 0, & (\lambda_1 + 2\lambda_2)(p_0 \alpha_0 - I_1 - I_2 + A) &= 0, \\ 2(\lambda_1 + \lambda_2)(p_0 \alpha_0 - I_1) + A(3\lambda_1 + \lambda_2) + 4\lambda_2 I_2 + B\lambda_1^2 &= 0, & p_0 \alpha_0 + A - I_1 + I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (9).

Предположим, что $\lambda_1 = -2\lambda_2$ (см. [3]). Тогда уравнения (9) примут вид:

$$A - B\lambda_2 = 0, \quad -2(p_0 \alpha_0 - I_1) - 5A + 4I_2 + 4B\lambda_2 = 0, \quad p_0 \alpha_0 + A - I_1 + I_2 = 0. \quad (10)$$

Переходя к «длинноволновому» предельному переходу в условиях (10), приходим к теореме 2.

Заметим, что на основе s-принципа можно исследовать влияние «многомерности» на условия существования бегущих волн. Это позволяет получить новую информацию о волнах по сравнению с одномерным случаем. Для иллюстрации этого факта предположим, что $I_2 = 0$. Тогда из уравнений (9) получим:

$$\begin{aligned} A + B(\lambda_1 + \lambda_2) &= 0, & 2(\lambda_1 + \lambda_2)(p_0\alpha_0 - I_1) + A(3\lambda_1 + \lambda_2) + B\lambda_1^2 &= 0, \\ p_0\alpha_0 + A - I_1 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая уравнения (11) относительно λ_1, λ_2 , найдем $\lambda_1 = -\frac{A}{B}$, $\lambda_2 = 0$. Следовательно, при $I_2 = 0$ уравнение (1) допускает решение вида $u(\xi) = \lambda_1(1 + e)^{-1}$, что проверяется и прямой подстановкой его в уравнение (1). Таким образом, в многомерном случае уравнение Фишера обладает большим разнообразием решений по сравнению с одномерным случаем. Этот вывод согласуется с аналогичным предположением относительно плоских волн, сделанным в [8].

Дробно-рациональную форму волновых решений можно использовать и для исследования многомерных уравнений, построенных на основе уравнения (1). Для иллюстрации подхода рассмотрим модифицированное уравнение Фишера вида

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} = Au + \sum_{i=1}^l r_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu^2 + \sqrt{u} \sum_{j=1}^l R_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (12)$$

где $p_0, A, r_i, q_{ij}, R_j, B$ – произвольные действительные числа. Решение уравнения (12) будем строить в виде

$$u(t, \bar{x}) \equiv u(\xi) = \lambda(1 + e)^{-2}, \quad e = \exp \left\{ \alpha_0 t + \sum_{k=1}^l \alpha_k x_k + \varphi \right\}, \quad (13)$$

где $\lambda > 0, \alpha_0, \alpha_k, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (13) в (12), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$A + B\lambda = 0, \quad p_0\alpha_0 + A = I_1 + I_2 + \sqrt{\lambda}J_1, \quad 2p_0\alpha_0 + A = 2I_1 - 4I_2, \quad J_1 \equiv \sum_{j=1}^l R_j \alpha_j. \quad (14)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Для того чтобы уравнение (12) имело решение (13) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (14).

Отметим, что при $J_1 = 0$, дисперсионные уравнения (14) согласуются с (3). Уравнение (12) дополняет список уравнений, приведенных в справочнике [7].

На основе предложенного подхода можно развить метод построения точных решений существенно нелинейных уравнений в частных производных, которые подчиняются s-принципу. В качестве примера рассмотрим многомерное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i=1}^l D_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Eu \right\} = \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^l K_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \sum_{i=1}^l L_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u^2 \sum_{i=1}^l N_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (15)$$

где $A_{ij}, D_i, E, K_i, L_i, N_i$ – произвольные действительные числа. Решение будем строить в виде

$$u(t, \bar{x}) \equiv u(\xi) = \lambda F^{-1}, \quad F(\xi) = k_0 + k_1 e + k_2 e^2, \quad e \equiv e(\xi), \quad (16)$$

где $\lambda > 0, k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$ – произвольные действительные числа. Подставляя (16) в (15), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 E k_0 &= L k_0 + \lambda N, & \alpha_0 (D k_0 - 2 E k_0) &= A K k_0 - 2 L k_0 - \lambda N, \\ \alpha_0 (k_1^2 + 2 k_0 k_2) (D - E) &= -K (A k_1^2 - 4 A k_0 k_2) - L (k_1^2 + 2 k_0 k_2) - \lambda k_2 N, \\ \alpha_0 (2 E - 3 D) &= 3 A K + 2 L, & \alpha_0 (E - 2 D) &= 4 A K + L, \end{aligned} \quad (17)$$

$$A \equiv \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad D \equiv \sum_{i=1}^l D_i \alpha_i, \quad K \equiv \sum_{i=1}^l K_i \alpha_i, \quad L \equiv \sum_{i=1}^l L_i \alpha_i, \quad N \equiv \sum_{i=1}^l N_i \alpha_i.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Для того чтобы уравнение (15) имело решение (16) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (17).

Для построения рационального решения из (17) найдем необходимые соотношения:

$$\alpha_0 = (A K - L)(D - E)^{-1}, \quad \lambda = -6 A K N^{-1},$$

причем для удобства считаем, что $k_0 = k_2 = 1, k_1 = 2$. Полагая $\varphi = \pi \sqrt{-1}$, из (16) получим

$$u(\xi) = -6 \alpha^2 \tilde{A} \tilde{K} \tilde{N}^{-1} \left[1 - \exp \left\{ \left(\frac{\alpha^3 \tilde{A} \tilde{K} - \alpha \tilde{L}}{\alpha \tilde{D} - E} \right) t + \alpha \sum_{k=1}^l d_k x_k \right\} \right]^{-2}, \quad (18)$$

$$\text{где } \tilde{A} \equiv \sum_{i,j=1}^l A_{ij} d_i d_j, \quad \tilde{D} \equiv \sum_{i=1}^l D_i d_i, \quad \tilde{K} \equiv \sum_{i=1}^l K_i d_i, \quad \tilde{L} \equiv \sum_{i=1}^l L_i d_i, \quad \tilde{N} \equiv \sum_{i=1}^l N_i d_i.$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в формуле (18), найдем

$$u(t, \bar{x}) = -6 \tilde{A} \tilde{K} \tilde{N}^{-1} E^2 \left[\tilde{L} t + E \sum_{k=1}^l d_k x_k \right]^{-2}. \quad (19)$$

Функция (19) и является искомым рациональным решением. Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} \{Eu\} = \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{i=1}^l K_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \sum_{i=1}^l L_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u^2 \sum_{i=1}^l N_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (20)$$

которое получается из уравнения (15) при $D_i \equiv 0, i = \overline{1, l}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 6. Функция (19) является рациональным решением уравнения (20).

В качестве второго примера рассмотрим уравнение вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B u + C u^2 \right\} + u \sum_{i=1}^l D_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (21)$$

которое подчиняется s-принципу, где A_{ij}, B, C, D_i – произвольные действительные числа. Решение строится в виде (16). Подставляя (16) в (21), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha_0 \lambda C + k_0 (\alpha_0 B + D) = 0, \quad \alpha_0^2 k_0 = \alpha_0 k_0 A - 2k_0 (\alpha_0 B + D) - \alpha_0 \lambda C,$$

$$\alpha_0^2 (k_1^2 + 2k_0 k_2) = -\alpha_0 A k_1^2 + 4\alpha_0 A k_0 k_2 - (\alpha_0 B + D)(k_1^2 + 2k_0 k_2) - \alpha_0 \lambda C k_2, \quad (22)$$

$$3\alpha_0^2 = -3\alpha_0 A - 2(\alpha_0 B + D), \quad 2\alpha_0^2 = -4\alpha_0 A - (\alpha_0 B + D),$$

где $A \equiv \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \alpha_i \alpha_j$, $D \equiv \sum_{i=1}^l D_i \alpha_i$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. Для того чтобы уравнение (21) имело решение (16) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (22).

Для построения рационального решения из (22) найдем необходимые соотношения:

$$\alpha_0 = D(6A - B)^{-1}, \quad \lambda = -6AC^{-1}k_0. \quad (23)$$

Далее, как и выше, положим, что $k_0 = k_2 = 1$, $k_1 = 2$, $\varphi = \pi\sqrt{-1}$, $\alpha_k = \alpha d_k$, $k = \overline{1, l}$. Тогда из (16) найдем

$$u(t, \vec{x}) = -6\alpha^2 \tilde{A} C^{-1} \left[1 - \exp \left\{ \left(\frac{\alpha \tilde{D}}{6\alpha^2 \tilde{A} - B} \right) t + \alpha \sum_{k=1}^l d_k x_k \right\} \right]^{-2}, \quad (24)$$

где $\tilde{A} \equiv \sum_{i,j=1}^l A_{ij} d_i d_j$, $\tilde{D} \equiv \sum_{i=1}^l D_i d_i$. Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в равенстве (24), получим,

$$u(t, \vec{x}) = -6\tilde{A} C^{-1} \left[-\frac{\tilde{D}}{B} t + \sum_{k=1}^l d_k x_k \right]^{-2}. \quad (25)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. Функция (25) является рациональным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu + Cu^2 \right\} + u \sum_{i=1}^l D_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Полученные результаты дополняют список уравнений в частных производных, приведенных в справочнике [7], для которых существуют точные решения.

В заключение рассмотрим систему многомерных уравнений Белоусова-Жаботинского (БЖ)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au + Bu^2 + Cuv + \sum_{i,j=1}^l p_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = Duv + \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \end{cases} \quad (26)$$

где $A, B, C, D, p_{ij}, q_{ij}$ – произвольные действительные числа. Классическая система БЖ имеет вид [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u-Av) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -Buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Решение системы (26) будем строить в виде

$$u(\xi) = \lambda_1(1+e)^{-2}, \quad v(\xi) = \mu + \lambda_2(1+e)^{-2}, \quad e \equiv e(\xi), \quad (27)$$

где $\lambda_1, \mu, \lambda_2$ – произвольные действительные числа. Подставляя (27) в (26), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$A + B\lambda_1 + C(\mu + \lambda_2) = 0, \quad \alpha_0 + A + C\mu - I_1 = 0, \quad 2\alpha_0 + A + C\mu + 4I_1 = 0, \\ \mu + \lambda_2 = 0, \quad \alpha_0\lambda_2 + D\lambda_1\mu - \lambda_2 I_2 = 0, \quad 2\alpha_0\lambda_2 + D\lambda_1\mu + 4\lambda_2 I_2 = 0, \quad (28)$$

$$I_1 \equiv \sum_{i,j=1}^l p_{ij}\alpha_i\alpha_j, \quad I_2 \equiv \sum_{i,j=1}^l q_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 9. Для того чтобы система (26) имела решение (27) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (28).

Уравнения (28) сводятся к следующим уравнениям:

$$\lambda_1 = -AB^{-1}, \quad \alpha_0 = -5I, \quad A - C\lambda_2 = 6I, \quad \mu = -\lambda_2, \quad I_1 = I_2 = I, \quad 6IB = AD. \quad (29)$$

Для построения рационального решения системы (26) из (29) найдем необходимые соотношения

$$\lambda_1 = -6\alpha^2 \tilde{I} D^{-1}, \quad \lambda_2 = 6\alpha^2 \tilde{I} (B - D) D^{-1} C^{-1}, \quad \alpha_0 = -5\alpha^2 \tilde{I},$$

$$\tilde{I} \equiv \sum_{i,j=1}^l p_{ij} d_i d_j \equiv \sum_{i,j=1}^l q_{ij} d_i d_j.$$

Полагая в (27) $\varphi = \pi\sqrt{-1}$ и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим

$$u_0(\bar{x}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (-6\alpha^2 \tilde{I} D^{-1}) \left[1 - \exp \left\{ -5\alpha^2 \tilde{I} t + \alpha \sum_{k=1}^l d_k x_k \right\} \right]^{-2} = -6\tilde{I} D^{-1} \left[\sum_{k=1}^l d_k x_k \right]^{-2}, \\ v_0(\bar{x}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -6\alpha^2 \tilde{I} (B - D) D^{-1} C^{-1} + 6\alpha^2 \tilde{I} (B - D) D^{-1} C^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp \left\{ -5\alpha^2 \tilde{I} t + \alpha \sum_{k=1}^l d_k x_k \right\} \right] \right\} = 6\tilde{I} (B - D) D^{-1} C^{-1} \left[\sum_{k=1}^l d_k x_k \right]^{-2}.$$

Нетрудно проверить, что функции $u_0(\bar{x})$, $v_0(\bar{x})$ удовлетворяют системе уравнений:

$$B u_0^2(\bar{x}) + C u_0(\bar{x}) v_0(\bar{x}) + \sum_{i,j=1}^l p_{ij} \frac{\partial^2 u_0(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad D u_0(\bar{x}) v_0(\bar{x}) + \sum_{i,j=1}^l q_{ij} \frac{\partial^2 v_0(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (30)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 10. Функции $u_0(\bar{x})$, $v_0(\bar{x})$ являются рациональным решением системы (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов В.И.** Колебания и волны. – Л.: ЛГУ, 1989.
2. **Жестков С.В.** Развитие конструктивных методов построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Могилев, 2003.
3. **Гудков В.В.** Точные решения типа распространяющихся волн некоторых эволюционных уравнений // Доклады РАН. 1997. – Т. 353. – № 4. – С. 439-441.
4. **Гудков В.В.** Аналитический подход к описанию распространяющихся с постоянной скоростью волн горения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. – Т. 37. – № 12. – С. 1482-1488.
5. **Бреховских Л.М., Гончаров В.В.** Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). – М., 1982.
6. **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи. – М., 1987.
7. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М., 1996.
8. **Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М., 1988.

SUMMARY

The mathematical principle for constructing multidimensional plane waves for Fisher and Beloysov-Zhabotinski equations the formulated, the necessary and sufficient conditions of their existence are obtained. The method of constructing nonlinear partial differential equations, which have the exact solutions has been propounded.