УДК 517.984

О.В. МИХАСЬКОВА

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ СДВИГА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $l^p(a)$

Настоящая работа посвящена нахождению существенных спектров операторов левого и правого сдвига во взвешенных банаховых пространствах бесконечных числовых последовательностей.

Обозначим через $l^p(a)$ банахово пространство бесконечных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые суммируются с весом a^n, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n |x_n|^p < \infty$, где $a > 0$ и $1 < p < \infty$, и для которых норма задается следующим образом: $\|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. В данной работе рассматриваются ограниченные линейные операторы *левого сдвига* $A : l^p(a) \to l^p(a)$, $Ax := (x(2), x(3), \ldots)$, и *правого сдвига* $S : l^p(a) \to l^p(a)$, $Sx := (0, x(1), x(2), \ldots)$, $x \in l^p(a)$, исследуются их аппроксимативные и существенные спектры.

Приведем ряд определений, непосредственно связанных с тематикой исследования. Пусть T – ограниченный линейный оператор с областью определения $l^p(a)$ и областью значений в $l^p(a)$. Подмножества спектра $\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C}$: существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p(a)$, такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0\}$ и $\sigma_{ad}(T) := \{\lambda \in \boldsymbol{C} : T - \lambda I$ не сюръективен$\}$ называются *аппроксимативно точечным* и *аппроксимативно дефектным* спектрами оператора T соответственно.

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$:

$$\Delta_1(T) := \left\{\lambda \in C : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\right\},\ \Phi^+(T) := \left\{\lambda \in \Delta_1(T) : nul(T - \lambda I) < \infty\right\},$$

$$\Phi^-(T) := \left\{\lambda \in \Delta_1(T) : def(T - \lambda I) < \infty\right\},\ \Delta_2(T) := \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s - \Phi(T),$$

$$\Delta_3(T) := \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T),\quad \Delta_4(T) := \left\{\lambda \in \Delta_3(T) : ind(T - \lambda I) = 0\right\} = \Phi_0(T),$$

$\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_4(T)$: проколотая окрестность точки лежит в резольвентном множестве $\rho(T)\}$.

Подмножество комплексной плоскости $\Delta_1(T)$ называется областью нормальной разрешимости оператора T, соответственно, $\Delta_2(T) = s - \Phi(T)$ – областью полуфредгольмовости оператора T, $\Delta_3(T)$ – областью фредгольмовости оператора T, $\Delta_4(T) = \Phi_0(T)$ – областью фредгольмовости нулевого индекса оператора T. Тогда каждое из следующих подмножеств спектра оператора T:

$$\sigma_{ek}(T) := \boldsymbol{C} \setminus \Delta_k(T),\ k = 1,2,3,4,5,$$

называется существенным спектром оператора T. В математической литературе используются следующие названия: $\sigma_{e1}(T)$ – существенный спектр Голдберга, $\sigma_{e2}(T)$ – существенный спектр Като, $\sigma_{e3}(T)$ – существенный спектр Фредгольма, $\sigma_{e4}(T)$ – существенный спектр Вейля (существенный спектр Шехтера) и $\sigma_{e5}(T)$ – существенный спектр Браудера. Различные свойства и мотивировки этих существенных спектров подробно рассмотрены в книге [1].

В отличие от банахова пространства бесконечных числовых последовательностей суммируемых без веса, в рассматриваемом пространстве $l^p(a)$ операторы левого и правого сдвига не являются сопряженными друг к другу. Для оператора A сопряженным является оператор $A':l^q(a)\to l^q(a)$, $a>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, определяемый формулой $A'y:=\left(0,\frac{y(1)}{a},\frac{y(2)}{a},\dots\right)$, $y\in l^q(a)$, а для оператора S – оператор $S':l^q(a)\to l^q(a)$, $a>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, определяемый формулой $S'y:=(ay(2),ay(3),\dots)$, в которой $y\in l^q(a)$. Действительно,

$$(A'f)(x)=f(Ax)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n(Ax(n))y(n)=ax(2)y(1)+a^2x(3)y(2)+\ldots+a^nx(n+1)y(n)+\ldots=$$

$$=ax(1)\cdot 0+a^2x(2)\left(\frac{y(1)}{a}\right)+a^3x(3)\left(\frac{y(2)}{a}\right)+\ldots+a^nx(n)\left(\frac{y(n-1)}{a}\right)+\ldots,$$

откуда следует, что $A'y=\left(0,\frac{y(1)}{a},\frac{y(2)}{a},\ldots,\frac{y(n)}{a},\ldots\right)$.

$$(S'f)(x)=f(Sx)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n(Sx(n))y(n)=a\cdot 0\cdot y(1)+a^2x(1)y(2)+\ldots+a^nx(n-1)y(n)+\ldots=$$

$=ax(1)(ay(2))+a^2x(2)(ay(3))+\ldots+a^{n-1}x(n-1)(ay(n))+\ldots$, откуда следует, что $S'y=(ay(2),ay(3),\ldots,ay(n),\ldots)$.

Теорема 1. *Нормы операторов левого сдвига A и правого сдвига S в банаховом пространстве $l^p(a)$ равны $\|A\|=a^{-\frac{1}{p}}$ и $\|S\|=a^{\frac{1}{p}}$ соответственно.*

Доказательство. Для нормы оператора левого сдвига A в банаховом пространстве $l^p(a)$ имеет место следующая оценка сверху:

$$\|Ax\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a^k|x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{a}|x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=a^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a^{k+1}|x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le a^{-\frac{1}{p}}\|x\|,$$

т.е. $\|A\|\le a^{-\frac{1}{p}}$. Получим оценку для нормы оператора A снизу. Для этого рассмотрим $x_0=(0,a^{-\frac{2}{p}},0,0,\ldots)\in l^p(a)$. Норма x_0 равна $\|x_0\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a^k|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=(a^2\cdot a^{-2})=1$.

Из определения нормы ограниченного линейного оператора следует, что $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in l^p(a), \|x\| \le 1\}$, поэтому $\|A\| \ge \|Ax_0\| = a^{-\frac{1}{p}}$. Поскольку $\|A\| \le a^{-\frac{1}{p}}$ и $\|A\| \ge a^{-\frac{1}{p}}$, то $\|A\| = a^{-\frac{1}{p}}$. Аналогично вычисляется норма оператора S: $\|Sx\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} a^n |x_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} a^{n-1} a |x_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le a^{\frac{1}{p}} \|x\|$. Воспользуемся указанным выше $x_0 = (0, a^{-\frac{2}{p}}, 0, 0, \ldots) \in l^p(a)$. Тогда $\|Sx_0\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} a^n |x_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (a^3 \cdot a^{-2})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$. Повторяя рассуждения, используемые при вычислении нормы оператора A, получаем норму оператора правого сдвига S в указанном пространстве: $\|S\| = a^{\frac{1}{p}}$. Теорема доказана.

Целесообразно отметить, что любой вопрос об операторе взвешенного сдвига в обычном пространстве последовательностей можно переформулировать для оператора обычного сдвига во взвешенном пространстве последовательностей. Более подробная информация об этом содержится в книге [2].

В следующих ниже двух теоремах излагаются способы получения формул точечного, дефектного, аппроксимативно точечного и аппроксимативно дефектного спектров операторов левого сдвига и правого сдвига в пространстве $l^p(a)$, которые были анонсированы в работе [3].

Для ограниченного линейного оператора *левого сдвига* $A : l^p(a) \to l^p(a)$, $Ax := (x(2), x(3), \ldots)$, $x \in l^p(a)$, справедлива следующая

Теорема 2. *Точечный, дефектный, аппроксимативно точечный и аппроксимативно дефектный спектры оператора левого сдвига A в $l^p(a)$ равны:* $\sigma_p(A) = D(a^{-\frac{1}{p}})$, $\sigma_d(A) = \varnothing$, $\sigma_{ap}(A) = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}})$, $\sigma_{ad}(A) = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ *соответственно, где* $D(a^{-\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < a^{-\frac{1}{p}}\}$, $\overline{D}(a^{-\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le a^{-\frac{1}{p}}\}$, $\partial D(a^{-\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = a^{-\frac{1}{p}}\}$.

Доказательство. Поскольку $\|A\| = a^{-\frac{1}{p}}$, то спектр оператора A является подмножеством замкнутого круга $\overline{D}(a^{-\frac{1}{p}})$. Исследуем оператор $A - \lambda I$ на инъективность. Для этого решим уравнение $(A - \lambda I)x = 0$, которое равносильно уравнению $Ax = \lambda x$, или, если записать его покоординатно, следующей бесконечной системе уравнений: $x(2) = \lambda x(1)$, $x(3) = \lambda x(2), \ldots, x(n) = \lambda x(n-1), \ldots$, откуда получаем, что $x(n) = \lambda^{n-1} x(1)$. Другими словами, существует $x = (x(1), \lambda x(1), \lambda^2 x(1), \ldots, \lambda^n x(1), \ldots)$, принадлежащий пространству $l^p(a)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $|\lambda| < a^{-\frac{1}{p}}$, которое вытекает из условия сходимости ряда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Поскольку при $|\lambda| < a^{-\frac{1}{p}}$ оператор $A - \lambda I$ не инъективен, то $\sigma_p(A) = D(a^{-\frac{1}{p}})$.

Известно, что $\sigma_d(A) = \sigma_p(A')$. Поэтому для нахождения дефектного спектра оператора A достаточно найти точечный спектр сопряженного к нему оператора A'. Исследуем оператор $A' - \lambda I$ на инъективность. Для этого решим уравнение $(A' - \lambda I)x = 0$, которое равносильно уравнению $A'x = \lambda x$, или, если записать его покоординатно, следующей бесконечной системе уравнений: $0 = \lambda x(1)$, $\frac{x(1)}{a} = \lambda x(2), \ldots, \frac{x(n)}{a} = \lambda x(n+1), \ldots$, откуда получаем, что ядро оператора $A' - \lambda I$ состоит из нуля, $N(A' - \lambda I) = \{0\}$, т.е. оператор $A' - \lambda I$ инъективен, $\sigma_p(A') = \varnothing$. Следовательно, $\sigma_d(A) = \sigma_p(A') = \varnothing$.

В работе [4] подсчитаны непрерывный и остаточный спектры оператора левого сдвига в пространстве $l^p(a)$ и получены следующие результаты: $\sigma_c(A) = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ и $\sigma_r(A) = \varnothing$ – непрерывный и остаточный спектры оператора левого сдвига в пространстве $l^p(a)$ соответственно. Воспользовавшись приведенными выше результатами, можно найти спектр исследуемого оператора A. Так как спектр оператора есть объединение точечного, непрерывного и остаточного спектров этого оператора, то спектр оператора левого сдвига A в банаховом пространстве $l^p(a)$ есть множество

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = D(a^{-\frac{1}{p}}) \cup \partial D(a^{-\frac{1}{p}}) \cup \varnothing = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}}).$$

Известно, что справедливы включения $\sigma_p(A) \subset \sigma_{ap}(A)$, $\sigma_c(A) \subset \sigma_{ap}(A)$ и $\varnothing \neq \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$, где $\sigma_{ap}(A)$ – замкнутое подмножество спектра оператора A. Следовательно, $\sigma_{ap}(A) = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}})$.

По свойству аппроксимативно дефектного спектра оператора $\sigma_{ad}(A) = \sigma_{ap}(A')$, поэтому для нахождения $\sigma_{ad}(A)$ достаточно найти $\sigma_{ap}(A')$. Докажем, что $\sigma_{ap}(A') = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$. Действительно, пусть $\lambda \notin \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ и $x \in l^q(a)$. Тогда для оператора $A' - \lambda I$ имеет место неравенство ограниченности снизу: $\|(A' - \lambda I)x\| = \|A'x - \lambda x\| \geq \left|\|A'x\| - |\lambda| \cdot \|x\|\right| = \left|a^{-\frac{1}{p}} - |\lambda|\right| \cdot \|x\|$, откуда следует, что $\lambda \notin \sigma_{ap}(A')$, т.е. $\sigma_{ap}(A') \subset \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$. С другой стороны, из свойств аппроксимативно точечного спектра оператора вытекает, что $\partial D(a^{-\frac{1}{p}}) \subset \sigma_{ap}(A')$. Поскольку имеют место два включения $\sigma_{ap}(A') \subset \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ и $\partial D(a^{-\frac{1}{p}}) \subset \sigma_{ap}(A')$, то $\sigma_{ap}(A') = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$. Так как $\sigma_{ad}(A) = \sigma_{ap}(A')$ и $\sigma_{ap}(A') = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$, то $\sigma_{ad}(A) = \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$. Теорема доказана.

Для ограниченного линейного оператора *правого сдвига* $S: l^p(a) \to l^p(a)$, $Sx := (0, x(1), x(2), \ldots)$, $x \in l^p(a)$, справедлива следующая

Теорема 3. *Точечный, дефектный, аппроксимативно точечный аппроксимативно дефектный спектры оператора правого сдвига S в $l^p(a)$ равны:*

$$\sigma_p(S) = \varnothing, \quad \sigma_d(S) = D(a^{\frac{1}{p}}), \quad \sigma_{ap}(S) = \partial D(a^{\frac{1}{p}}), \quad \sigma_{ad}(S) = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}}),$$

где $D(a^{\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < a^{\frac{1}{p}}\}$, $\overline{D}(a^{\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le a^{\frac{1}{p}}\}$, $\partial D(a^{\frac{1}{p}}) := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = a^{\frac{1}{p}}\}$.

Доказательство. Поскольку $\|S\| = a^{\frac{1}{p}}$, то $\sigma(S) \subset \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$. Покажем, что $\sigma_p(S) = \varnothing$. Пусть $\lambda \in \sigma_p(S)$. Тогда существует $0 \ne x \in l^p(a)$ такой, что $Sx = \lambda x$, т.е. $\lambda x(1) = 0$, $\lambda x(2) = x(1), \ldots, \lambda x(n) = x(n-1), \ldots$, откуда следует, что $x = 0$. Иными словами, не существует отличного от нуля значения $x \in l^p(a)$, удовлетворяющего уравнению $Sx = \lambda x$, поэтому $\sigma_p(S) = \varnothing$.

Покажем, что $\sigma_d(S) = D(a^{\frac{1}{p}})$. Пусть $\lambda \in D(a^{\frac{1}{p}})$. Определим линейный функционал f на $l^p(a)$ следующим образом: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} x(n)$, $x \in l^p(a)$. Тогда справедлива оценка $|f(x)|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{(n+1)p} |x(n)|^p < \sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1} |x(n)|^p = a\|x\|^p < \infty$. Иными словами, f – линейный ограниченный функционал на $l^p(a)$. Поскольку известно, что $\sigma_d(S) = \sigma_p(S')$, то для вычисления $\sigma_d(S)$ достаточно определить $\sigma_p(S')$.

$$S'f(x) = f(Sx) = f(0, x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) = \lambda^3 x(1) + \lambda^4 x(2) + \ldots = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} x(n)\right) = \lambda f(x),$$

где $x \in l^p(a)$. Отсюда следует, что $D(a^{\frac{1}{p}}) \subset \sigma_p(S')$. С другой стороны, если $\lambda \in \sigma_p(S')$, то существует ненулевой линейный ограниченный функционал f на $l^p(a)$ такой, что $S'f = \lambda f$ и $|\lambda| < a^{\frac{1}{p}}$. Таким образом, $\sigma_d(S) = \sigma_p(S') = D(a^{\frac{1}{p}})$.

Так как справедливо включение $\sigma_d(S) \subset \sigma(S) \subset \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$, и поскольку $\sigma(S)$ – замкнутое подмножество множества комплексных чисел, то $\sigma(S) = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$.

Докажем далее, что $\sigma_{ap}(S) = \partial D(a^{\frac{1}{p}})$. Пусть $\lambda \notin \partial D(a^{\frac{1}{p}})$ и $x \in l^p(a)$. Тогда для оператора $S - \lambda I$ справедливо неравенство ограниченности снизу:

$\|(S-\lambda I)x\| = \|Sx-\lambda x\| \ge \left|\|Sx\| - |\lambda|\cdot\|x\|\right| = \left|a^{\frac{1}{p}} - |\lambda|\right|\cdot\|x\|$, откуда следует, что $\lambda \notin \sigma_{ap}(S)$. Таким образом, имеет место включение $\sigma_{ap}(S) \subset \partial D(a^{\frac{1}{p}})$. Согласно свойствам аппроксимативно точечного спектра оператора граница спектра оператора включается в аппроксимативно точечный спектр оператора, т.е. $\partial D(a^{\frac{1}{p}}) \subset \sigma_{ap}(S)$. Поэтому из $\sigma_{ap}(S) \subset \partial D(a^{\frac{1}{p}})$ и $\partial D(a^{\frac{1}{p}}) \subset \sigma_{ap}(S)$ следует, что $\sigma_{ap}(S) = \partial D(a^{\frac{1}{p}})$.

Известно, что $\sigma_{ad}(S) = \sigma_{ap}(S')$. Из свойств аппроксимативно точечного спектра оператора следуют включения $\sigma_{ap}(S') \subset \sigma(S')$, $\sigma_p(S') \subset \sigma_{ap}(S')$. Более того, $\sigma_{ap}(S')$ – непустое замкнутое подмножество спектра оператора, граница спектра оператора включается в аппроксимативно точечный спектр оператора. Поскольку $\sigma(S) = \sigma(S') = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$ и $\sigma_p(S') = D(a^{\frac{1}{p}})$, то $\sigma_{ap}(S') = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$. Следовательно, $\sigma_{ad}(S) = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}})$. Теорема доказана.

Как видно из изложенных выше рассуждений, точечный, дефектный, аппроксимативно точечный и аппроксимативно дефектный спектры сопряженных операторов A' и S' оказываются полезными при нахождении различных подмножеств спектра операторов левого сдвига A и правого сдвига S в банаховом пространстве $l^p(a)$. Поэтому целесообразно привести результаты для точечного, дефектного, аппроксимативно точечного и аппроксимативно дефектного спектров сопряжённых операторов уже без доказательств в следующем виде:

$$\sigma_p(A') = \varnothing,\ \sigma_d(A') = D(a^{-\frac{1}{p}}),\ \sigma_{ap}(A') = \partial D(a^{-\frac{1}{p}}),\ \sigma_{ad}(A') = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}}),$$

$$\sigma_p(S') = D(a^{\frac{1}{p}}),\ \sigma_d(S') = \varnothing,\ \sigma_{ap}(S') = \overline{D}(a^{\frac{1}{p}}),\ \sigma_{ad}(S') = \partial D(a^{\frac{1}{p}}).$$

Для существенных спектров операторов левого сдвига A и правого сдвига S в банаховом пространстве справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 4. *Существенные спектры оператора левого сдвига A в пространстве $l^p(a)$ зависимы и вычисляются по следующим формулам:*

$$\sigma_{e1}(A) = \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e3}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{-\frac{1}{p}}\},$$

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A) = \sigma(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \le a^{-\frac{1}{p}}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2, $\sigma_p(A) = D(a^{-\frac{1}{p}})$ и $\sigma_{ap}(A) = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}})$. Поскольку из свойств аппроксимативно точечного спектра оператора следует, что $\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : N(A-\lambda I) \ne \{0\}$ или $\overline{R(A-\lambda I)} \ne R(A-\lambda I)\}$ [1], то нам предстоит удостовериться в том, что при $\lambda \in \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ область значений оператора

$A-\lambda I$ незамкнута, т.е. $\overline{R(A-\lambda I)} \neq R(A-\lambda I)$. Для $\lambda \in D(a^{-\frac{1}{p}})$ область значений оператора $A-\lambda I$ замкнута, т.е. $\overline{R(A-\lambda I)} = R(A-\lambda I)$. Рассмотрим некоторую окрестность точки $\lambda \in \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$. Для тех значений λ из окрестности, которые принадлежат $D(a^{-\frac{1}{p}})$, имеем:

$$nul(A-\lambda I) = dim\, N(A-\lambda I) = 1 < \infty,\ def(A-\lambda I) = nul(A'-\lambda I) = 0 < \infty,$$

оператор $A-\lambda I$ – полуфредгольмов и $ind(A-\lambda I) = nul(A-\lambda I) - def(A-\lambda I) = 1 \neq 0$. Для значений λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| > a^{-\frac{1}{p}}$, индекс оператора $A-\lambda I$ равен нулю. Однако по теореме Като об устойчивости индекса [5, теорема IV.5.22], если бы $\overline{R(A-\lambda I)} = R(A-\lambda I)$ для $\lambda \in \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$, то тогда оператор $A-\lambda I$ был бы полуфредгольмовым и его индекс должен был бы оставаться устойчивым в окрестности. Таким образом, для $\lambda \in \partial D(a^{-\frac{1}{p}})$ область значений оператора $A-\lambda I$ незамкнута, т.е. $\overline{R(A-\lambda I)} \neq R(A-\lambda I)$.

Поскольку при $\lambda \in D(a^{-\frac{1}{p}})$ $\overline{R(A-\lambda I)} = R(A-\lambda I)$, то $\Delta_1(A) = D(a^{-\frac{1}{p}}) \cup \rho(A)$. Так как при $\lambda \in \Delta_1(A)$ $nul(A-\lambda I) < \infty$ и $def(A-\lambda I) < \infty$, то $\Phi^+(A) = \Delta_1(A)$ и $\Phi^-(A) = \Delta_1(A)$. Области полуфредгольмовости, фредгольмовости и фредгольмовости нулевого индекса оператора левого сдвига A в банаховом пространстве $l^p(a)$ равны:

$$\Delta_2(A) = \Phi^+(A) \cup \Phi^-(A) = s-\Phi(A) = \Delta_1(A),\quad \Delta_3(A) = \Phi^+(A) \cap \Phi^-(A) = \Phi(A) = \Delta_1(A),$$

$$\Delta_4(A) = \{\lambda \in \Delta_3(A) : ind(A-\lambda I) = 0\} = \Phi_0(A) = \rho(A).$$

Поскольку $\Delta_4(A) = \rho(A)$, то $\Delta_5(A) = \Delta_4(A)$. Тогда, исходя из определения существенных спектров линейных ограниченных операторов, для оператора левого сдвига A в банаховом пространстве $l^p(a)$ справедливы следующие результаты: в силу того, что $\Delta_1(A) = \Delta_2(A) = \Delta_3(A)$ и $\Delta_4(A) = \Delta_5(A)$, то:

$$\sigma_{e1}(A) = \sigma_{e2}(A) = \sigma_3(A) = \partial D(a^{-\frac{1}{p}}) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{-\frac{1}{p}}\}$$

$$\text{и } \sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A) = \sigma(A) = \overline{D}(a^{-\frac{1}{p}}) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \leq a^{-\frac{1}{p}}\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Существенные спектры оператора правого сдвига S являются p-зависимыми и вычисляются по следующим формулам:*

$$\sigma_{e1}(S) = \sigma_{e2}(S) = \sigma_{e3}(S) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = a^{\frac{1}{p}}\},\ \sigma_{e4}(S) = \sigma_{e5}(S) = \sigma(S) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| \leq a^{\frac{1}{p}}\}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3, $\sigma_p(S)=\varnothing$ и $\sigma_{ap}(S)=\partial D(a^{\frac{1}{p}})$. Поскольку из свойств аппроксимативно точечного спектра оператора следует, что $\sigma_{ap}(S)=\{\lambda\in \boldsymbol{C} : N(S-\lambda I)\neq\{0\}$ или $\overline{R(S-\lambda I)}\neq R(S-\lambda I)\}$, то при $\lambda\notin\sigma_{ap}(S)$ $\overline{R(S-\lambda I)}=R(S-\lambda I)$. Таким образом, $\Delta_1(S)=D(a^{\frac{1}{p}})\cup\rho(S)$, $\Phi^+(S)=\Phi^-(S)=\Delta_1(S)$, так как $nul(S-\lambda I)=0<\infty$ и $def(S-\lambda I)=1<\infty$ при $\lambda\in\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)=\Delta_3(S)=\Delta_1(S)$, $\Delta_4(S)=\Delta_5(S)=\rho(S)$.

Следовательно, исходя из определения существенных спектров линейных ограниченных операторов, для оператора правого сдвига S в $l^p(a)$ справедливы следующие результаты: $\sigma_{e1}(S)=\sigma_{e2}(S)=\sigma_{e3}(S)=\partial D(a^{\frac{1}{p}})=\{\lambda\in \boldsymbol{C} : |\lambda|=a^{\frac{1}{p}}\}$ и $\sigma_{e4}(S)=\sigma_{e5}(S)=\boldsymbol{C}\setminus\Delta_4(S)=\sigma(S)=\overline{D}(a^{\frac{1}{p}})=\{\lambda\in \boldsymbol{C} : |\lambda|\le a^{\frac{1}{p}}\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Еровенко В.А.*** Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов. – Минск: БГУ, 2001. – 145 с.
2. ***Халмош П.*** Гильбертово пространство в задачах. – Н.:ИО НФМИ, 2000. – 348 с.
3. ***Михаськова О.В.*** Аппроксимативные спектры операторов сдвига в банаховых пространствах с весом // Материалы XL Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. – Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 2002. – С.64-66.
4. ***Bhopinder Singh.*** On adjoints and spectra of shift operators on weighted sequence spaces // Journal of the Indian Math. Soc. – 1998. – Vol. 65. – P. 59-65.
5. ***Като Т.*** Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972. – 740с.

SUMMARY

This paper is devoted to the determination of the essential spectra of left and right shift operators in weight Banach spaces of infinite numeric sequences $l^p(a)$, *where* $a>0$ *and* $1<p<\infty$. *In this paper you can find the formulae for calculating essential spectra of the operators mentioned above.*