УДК 511.3

В.Н. БОРБАТ, С.Г. ЧАРНЫЙ

О ТОЧНОМ ПОРЯДКЕ СОВМЕСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НУЛЯ В R^3 И ГИПОТЕЗА В.Г. СПРИНДЖУКА

Начало исследованиям по метрической теории совместных диофантовых приближений было положено академиком АН Беларуси В.Г. Спринджуком.

В [1, 2] он поставил основную проблему этого направления, решил ее частные случаи и указал некоторые применения. Гипотеза В.Г. Спринджука состояла в следующем. Пусть $P(x)$ многочлен с целыми коэффициентами и $\nu_n(\overline{\omega})$ – точная верхняя грань $\nu > 0$, для которых система неравенств

$$max(|P(\omega_1)|, ..., |P(\omega_k)|) < H^{-\nu} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)$. Верно ли, что для почти всех $\overline{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_k)$

$$\nu_n(\overline{\omega}) = \frac{n+1}{k} - 1 \ ?$$

Доказательство гипотезы В. Г. Спринджука было проведено в более общей формулировке В.И. Берником [3]. Пусть $\omega_n(\overline{\omega})$ – точная верхняя грань тех $\omega > 0$, для которых неравенство

$$\prod_{i=1}^{k} |P(\omega_i)| < H^{-\omega} \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)$.

Тогда для почти всех $\overline{\omega}$: $\omega_n = n - k + 1$.

В такой формулировке задача ставилась в [4]. В дальнейшем были получены многочисленные обобщения и применения этого результата. Комплексный вариант гипотезы В.Г. Спринджука был доказан Ф.Ф. Желудевичем [5]. И.Р. Домбровский [6] рассматривал неравенство (2) с многочленами, у которых некоторые коэффициенты совпадают.

В работе [8] получен двумерный аналог гипотезы В.Г. Спринджука для произвольной монотонно убывающей функции $\Psi(H)$ со сходящимся рядом $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$.

В данной работе определяется точный порядок совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в R^3.

Пусть функция $\Psi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$ и $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$.

Теорема 1. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-\omega_1}\Psi^{\nu_1}(H), \\ |P(\omega_2)| < H^{-\omega_2}\Psi^{\nu_2}(H), \\ |P(\omega_3)| < H^{-\omega_3}\Psi^{\nu_3}(H), \end{cases} \tag{3}$$

где $\omega_1+\omega_2+\omega_3=n-3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_3=1$ имеет для почти всех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in R^3$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$.

Введем вначале некоторые понятия и обозначения.

Пусть $P(x)\in Z[x]$, $x_1,x_2,...,x_n$ – его корни. Определим

$$S(x_i)=\{\omega\in R:\min_{1\le j\le n}|\omega-x_j|=|\omega-x_i|\}.$$

Упорядочим корни $P(x)$ относительно любого из его корней, например x_1, следующим образом: $|x_1-x_2|\le|x_1-x_3|\le...\le|x_1-x_n|$.

Обозначим через $P_n(H)$ класс неприводимых над Q многочленов, у которых $a_n=H(P), H(P)=H$. Пусть $P_n=\bigcup_{H=1}^{\infty}P_n(H)$.

Зафиксируем ε. Положим $\varepsilon_1=\varepsilon d^{-1}$, где $d=d(n)$ достаточно большая величина, зависящая только от *n*. Обозначим $T=[\varepsilon_1^{-1}]$ и введем $\mu_i\in R, l_i\in Z$ следующим образом

$$|x_1-x_i|=H^{-\mu_i},\ \frac{l_i-1}{T}\le\mu_i<\frac{l_i-1}{T},\ 2\le i\le n.$$

С каждым многочленом $P(x)\in P_n(H)$ будем связывать целочисленный вектор $\overline{s}=(l_2,...,l_n)$. Нетрудно доказать [2], что число таких векторов конечно и зависит только от *n* и ε. Многочлены $P(x)\in P_n(H)$ с одним и тем же вектором $\overline{s}$ объединим в подмножество $P_n(H,\overline{s})$, а $P(x)\in P_n$ – в подмножество $P_n(\overline{s})$. Пусть далее

$$p_i=\frac{l_{i+1}+...+l_n}{T},\ 1\le i\le n-1.$$

Через $c(n)$ будем обозначать положительные функции, зависящие только от *n* и ε. Над $c(n)$ будем производить действия по формальным правилам $c(n)+c(n)=c(n), c(n)c(n)=c(n)$, смысл которых состоит в том, что сумма и произведение есть снова некоторая функция, зависящая от *n* и ε.

Лемма 1. Пусть $P(x)\in P_n(H)$, $\omega\in S(x_1)$. Тогда

$$|\omega-x_1|\le|P(\omega)|\cdot|P'(x_1)|^{-1}, \tag{4}$$

$$|\omega-x_1|\le\min_{2\le j\le n}(|P(\omega)|\cdot|P'(x_1)|^{-1}|x_1-x_2|\cdots|x_1-x_j|)^{1/j}. \tag{5}$$

Лемма 2. Пусть $P(x)\in P_n(H,\overline{s})$. Тогда

$$|P^{(l)}(x_1)|<c(n)H^{1-p_l+(n-l)\varepsilon_1},\ l=1,...,n-1. \tag{6}$$

Леммы 1 и 2 доказаны в [3].

Лемма 3. Пусть $\delta>0$ некоторое вещественное число, $n\ge2$ натуральное число. Пусть *P(x)* и *Q(x)* целочисленные взаимнопростые многочлены степени не выше *n* и $max(H(P),H(Q))\le H$. Тогда, если для всех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ из некоторого параллелепипеда $K=I_1\times I_2\times I_3$,
$|I_1|=H^{-\mu_1},\ \mu_1>0,\ |I_2|=H^{-\mu_2},\ \mu_2>0,\ |I_3|=H^{-\mu_3},\ \mu_3>0$ выполняются неравенства

$$max(|P(\omega_1)|,|Q(\omega_1)|)<H^{-\tau_1},\ max(|P(\omega_2)|,|Q(\omega_2)|)<H^{-\tau_2},\ max(|P(\omega_3)|,|Q(\omega_3)|)<H^{-\tau_3}$$

то
$\tau_1+\tau_2+\tau_3+3+2(max(\tau_1+1-\mu_1,0)+max(\tau_2+1-\mu_2,0)+max(\tau_3+1-\mu_3,0))\le 2n+\delta$.

Лемма доказывается аналогично лемме 2 из [7].

Лемма 4. (Бореля-Кантелли). Пусть в пространстве дана система $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ измеримых множеств A_i с условием $\sum_{i=1}^{\infty}mesA_i<\infty$.

Тогда мера множества точек, попадающих в бесконечное число множеств A_i, равна нулю.

Лемма 4 доказана в [2].

Лемма 5. Пусть $P_1(x),P_2(x),...,P_l(x)\in R[x]$ – многочлены и $P(x)=P_1(x)P_2(x)\cdots P_l(x)$.
Тогда $c_1(n)H(P_1)H(P_2)...H(P_l)<H(P)<c_2(n)H(P_1)H(P_2)\cdots H(P_l)$.
Лемма 5 доказана в [2].

Лемма 6. Пусть $G\subset R^3$ некоторая ограниченная область и $B\subset G$ измеримое множество в пространстве $\mu B>c(n)\mu G$. Пусть далее для $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in B$ верно неравенство $|P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3)|<H^{-v}$, $degP(x)\le n$.

Тогда для всех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in G$ верно неравенство

$$|P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3)|<c(n)H^{-v}.$$

Лемма 7. Неравенство

$$|P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3)|<H^{-n+3-\delta} \tag{7}$$

при любом $\delta>0$ имеет почти для всех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in R^3$ лишь конечное число решений в приводимых целочисленных многочленах степени не выше *n*.

Леммы 6 и 7 доказываются аналогично леммам 2 и 3 из [8].

Поскольку в теореме идет речь о конечности или бесконечности числа решений системы неравенств (3), то будем считать, что $H>H_0$, где H_0 – достаточно большое натуральное число. Далее будем считать, что $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ трансцендентные числа, поскольку мера тех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in R^3$, у которых хотя бы одно из чисел $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ алгебраическое, равна нулю. Систему неравенств (3) можно рассматривать лишь в многочленах $P(x)\in P_n$. Переход к многочленам, у которых старший коэффициент равен высоте, производится как в [2]. Переход к неприводимым многочленам производится с использованием леммы 7.

Пусть $P(x)\in P_n$ и $x_1,x_2,...,x_n$ – его корни. Будем считать, что корни $x_1,x_2,...,x_n$ упорядочены таким образом, что $\Re ex_1\le\Re ex_2\le...\le\Re ex_n$. В случае равенства $\Re ex_l=\Re ex_t$ ранее будем записывать тот корень, у которого меньше модуль мнимой части, а в случае равенства модулей мнимых частей ранее поставим тот корень, мнимая часть которого положительна. Зафиксируем ε.

Выберем три любых корня x_{11}, x_{21} и x_{31} многочлена *P(x)*. Относительно каждого из них все остальные корни упорядочим следующим образом:

$$|x_{11}-x_{12}|\le|x_{11}-x_{13}|\le...\le|x_{11}-x_{1n}|,$$
$$|x_{21}-x_{22}|\le|x_{21}-x_{23}|\le...\le|x_{21}-x_{2n}|,$$
$$|x_{31}-x_{32}|\le|x_{31}-x_{33}|\le...\le|x_{31}-x_{3n}|.$$

Введем обозначения:

$$|x_{11}-x_{1i}|=H^{-\mu_i},\ |x_{21}-x_{2i}|=H^{-\theta_i},\ |x_{31}-x_{3i}|=H^{-\gamma_i},\ i=2,...,n.$$

Определим целые числа l_i, s_i и b_i из неравенств

$$\frac{l_i-1}{T}\le\mu_i<\frac{l_i}{T},\ \frac{s_i-1}{T}\le\theta_i<\frac{s_i}{T},\ \frac{b_i-1}{T}\le\gamma_i<\frac{b_k}{T},\ i=2,...,n.$$

С фиксированной тройкой корней (x_{11},x_{21},x_{31}) многочлена $P(x)$ будем связывать целочисленный вектор $\overline{s}_{1,2,3}=\overline{s}=(l_2,...,l_n,s_2,...,s_n,k_2,...,k_n)$. Все многочлены $P(x)\in P_n$, имеющие один и тот же вектор $\overline{s}$, объединим в класс $P_n(H,\overline{s})$. Пусть далее

$$p_i=\frac{l_{i+1}+...+l_n}{T},\ i=1,...,n-1,\ q_j=\frac{s_{j+1}+...+s_n}{T},\ j=1,...,n-1,\ r_k=\frac{b_{k+1}+...+b_n}{T},\ k=1,...,n-1.$$

Лемма 8. Число классов $P_n(H,\overline{s})$ конечно и зависит только от n и ε.

Лемма 8 доказана в [3].

Рассмотрим четыре возникающие возможности

$$1.\ \begin{aligned}&l_2T^{-1}+p_1\le\omega_1+\nu_1+1,\\&s_2T^{-1}+q_1\le\omega_2+\nu_2+1,\\&b_2T^{-1}+r_1\le\omega_3+\nu_3+1;\end{aligned}\tag{8}$$

$$2.\ \begin{aligned}&l_2T^{-1}+p_1>\omega_1+\nu_1+1,\\&s_2T^{-1}+q_1>\omega_2+\nu_2+1,\\&b_2T^{-1}+r_1>\omega_3+\nu_3+1;\end{aligned}\tag{9}$$

$$3.\ \begin{aligned}&l_2T^{-1}+p_1>\omega_1+\nu_1+1,\\&s_2T^{-1}+q_1>\omega_2+\nu_2+1,\\&b_2T^{-1}+r_1\le\omega_3+\nu_3+1;\end{aligned}\tag{10}$$

$$4.\ \begin{aligned}&l_2T^{-1}+p_1>\omega_1+\nu_1+1,\\&s_2T^{-1}+q_1\le\omega_2+\nu_2+1,\\&b_2T^{-1}+r_1\le\omega_3+\nu_3+1.\end{aligned}\tag{11}$$

В зависимости от выполнения неравенств (8), (9), (10), (11) объединим многочлены $P(x)\in P_n(H,\overline{s})$ в классы первого, второго, третьего и четвертого типов соответственно.

Замечание. Рассмотрение остальных четырех случаев производится аналогично.

Лемма 9. Пусть $B(\delta,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – множество вещественных векторов $\overline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in P_n$ с условием $|x_i - x_j| > \delta$ для любых i, j и некоторого произвольного, но фиксированного $\delta > 0$. Тогда для любого δ имеем $\mu B(\delta, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0$.

Доказательство леммы 9 незначительно отличается от леммы 10 в [3].

Лемма 10. Пусть $B_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – множество вещественных векторов $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, для которых система неравенств (1) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in P_2$. Тогда $\mu B_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0$.

Лемма 10 доказывается аналогично лемме 11 из [3].

Обозначим через $L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – множество тех $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3$, для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$.

Предложение 1. Если выполнены неравенства (8) и

$$n - 1 + 6n\varepsilon_1 < l_2 T^{-1} + p_1 + s_2 T^{-1} + q_1 + b_2 T^{-1} + r_1, \qquad (12)$$

то мера множества $L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равна нулю.

Доказательство. Воспользуемся неравенством $\Psi(H) < H^{-1}$. Тогда (3) примет вид

$$|P(\omega_1)| < H^{-\omega_1 - \nu_1},\ |P(\omega_2)| < H^{-\omega_2 - \nu_2},\ |P(\omega_3)| < H^{-\omega_3 - \nu_3}. \qquad (13)$$

Определим $P_t(\overline{s}) = \bigcup\limits_{2^t \le H < 2^{t+1}} P_n(H, \overline{s})$. Так как $|x_i| < 2$, то из неравенства (5) получаем при $j=n$, что все $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3$, для которых выполняется система неравенств (13), находятся внутри куба $[-3;3]\times[-3;3]\times[-3;3]$.

Разобьем его на равные параллелепипеды П со сторонами $H^{-\eta_1}$, $H^{-\eta_2}$ и $H^{-\eta_3}$, где

$$\eta_1 = \omega_1 + \nu_1 + 1 - p_1 - 1/3\varepsilon_1,\ \eta_2 = \omega_2 + \nu_2 + 1 - q_1 - 1/3\varepsilon_1,\ \eta_3 = \omega_3 + \nu_3 + 1 - r_1 - 1/3\varepsilon_1.$$

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит параллелепипеду П, если существует $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Pi$, что $|P(\omega_1)| < H^{-\omega_1 - \nu_1}$, $|P(\omega_2)| < H^{-\omega_2 - \nu_2}$, $|P(\omega_3)| < H^{-\omega_3 - \nu_3}$.

Пусть каждому параллелепипеду П принадлежит не более одного многочлена $P(x)\in P_t(\overline{s})$. Тогда из (4) получаем, что мера $\omega_1 \in S(x_{11})$, для которых выполняется первое неравенство системы (13), не превосходит $c(n)2^{-t(\omega_1+\nu_1+1-p_1)}$, мера $\omega_2 \in S(x_{21})$, для которых выполняется первое неравенство системы (13), не превосходит $c(n)2^{-t(\omega_2+\nu_2+1-q_1)}$, мера $\omega_3 \in S(x_{31})$, для которых выполняется первое неравенство системы (13), не превосходит $c(n)2^{-t(\omega_3+\nu_3+1-r_1)}$. Поэтому мера тех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\omega_1 \in S(x_{11})$, $\omega_2 \in S(x_{21})$, $\omega_3 \in S(x_{31})$, для которых выполняется система неравенств (13), не превосходит $c(n)2^{t(-n-1+p_1+q_1+r_1)}$.

Число многочленов не превосходит количества параллелепипедов П. Следовательно, мера тех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, для которых выполняется система неравенств (13) хотя бы для одного многочлена $P(x)\in P_t(\bar{s})$, оценивается сверху величиной

$$c(n)2^{t(-n-1+p_1+q_1+r_1)}2^{t(\omega_1+\nu_1+1-p_1-1/3\varepsilon_1)}2^{t(\omega_2+\nu_2+1-q_1-1/3\varepsilon_1)}2^{t(\omega_3+\nu_3+1-r_1-1/3\varepsilon_1)}<c(n)2^{-t\varepsilon_1}.$$

Так как ряд $\sum_{t=0}^{\infty}2^{-t\varepsilon_1}$ сходится, то доказательство предложения 1 в этом случае следует из леммы Бореля-Кантелли.

Теперь предположим, что существуют такие параллелепипеды П, которым принадлежит два или более многочленов $P(x)\in P_t(\bar{s})$. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ принадлежат П, тогда существуют такие точки $(\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31})$, $(\omega_{12},\omega_{22},\omega_{32})$, принадлежащие П, что

$$\begin{aligned}
&max(|P(\omega_{11})|,|Q(\omega_{12})|)<H^{-\omega_1-\nu_1},\\
&max(|P(\omega_{21})|,|Q(\omega_{22})|)<H^{-\omega_2-\nu_2},\\
&max(|P(\omega_{31})|,|Q(\omega_{32})|)<H^{-\omega_3-\nu_3}.
\end{aligned}\tag{14}$$

Пусть $x_{11}(P),x_{21}(P),x_{31}(P),x_{11}(Q),x_{21}(Q),x_{31}(Q)$ – ближайшие к $\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31},\omega_{12},\omega_{22},\omega_{32}$ корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Из (4) и (14) получаем

$$\begin{aligned}
&max(|\omega_{11}-x_{11}(P)|,|\omega_{12}-x_{11}(Q)|)<H^{-\omega_1-\nu_1-1+p_1},\\
&max(|\omega_{21}-x_{21}(P)|,|\omega_{22}-x_{21}(Q)|)<H^{-\omega_2-\nu_2-1+q_1},\\
&max(|\omega_{31}-x_{31}(P)|,|\omega_{32}-x_{31}(Q)|)<H^{-\omega_3-\nu_3-1+r_1}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&|x_{11}(P)-x_{11}(Q)|\le|x_{11}(P)-\omega_{11}|+|\omega_{11}-\omega_{12}|+|\omega_{12}-x_{11}(Q)|<\\
&<c(n)(H^{-\omega_1-\nu_1-1+p_1}+H^{-\eta_1})<c(n)H^{-\eta_1},
\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&|x_{21}(P)-x_{21}(Q)|\le|x_{21}(P)-\omega_{21}|+|\omega_{21}-\omega_{22}|+|\omega_{22}-x_{21}(Q)|<\\
&<c(n)(H^{-\omega_2-\nu_2-1+q_1}+H^{-\eta_2})<c(n)H^{-\eta_2},
\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&|x_{31}(P)-x_{31}(Q)|\le|x_{31}(P)-\omega_{31}|+|\omega_{31}-\omega_{32}|+|\omega_{32}-x_{31}(Q)|<\\
&<c(n)(H^{-\omega_3-\nu_3-1+r_1}+H^{-\eta_3})<c(n)H^{-\eta_3}.
\end{aligned}\tag{17}$$

Оценим разность $|x_{11}(P)-x_{1i}(Q)|$, $i=2,\dots,n$, учитывая, что из первого неравенства (8) следует $l_2T^{-1}-\varepsilon_1<\eta_1$

$$\begin{aligned}
&|x_{11}(P)-x_{1i}(Q)|\le|x_{11}(P)-x_{11}(Q)|+|x_{11}(Q)-x_{1i}(Q)|<\\
&<c(n)(H^{-\eta_1}+H^{-l_iT^{-1}+\varepsilon})<c(n)H^{-l_iT^{-1}+\varepsilon_1}.
\end{aligned}\tag{18}$$

Из (15) и (18) получаем

$$\prod_{i=1}^{n}|x_{11}(P)-x_{1i}(Q)|<c(n)H^{-\eta_1-p_1+(n-1)\varepsilon_1}.\tag{19}$$

Аналогично, учитывая, что из второго неравенства (8) следует $s_2T^{-1} - \varepsilon_1 < \eta_2$, получаем

$$| x_{21}(P) - x_{2i}(Q) | < c(n)H^{-s_iT^{-1}+\varepsilon_1}. \tag{20}$$

Из (16), (20) имеем

$$\prod_{i=1}^{n} | x_{21}(P) - x_{2i}(Q) | < c(n)H^{-\eta_2 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1}. \tag{21}$$

Из третьего неравенства (8) следует $b_2T^{-1} - \varepsilon_1 < \eta_3$, получаем

$$| x_{31}(P) - x_{3i}(Q) | < c(n)H^{-b_iT^{-1}+\varepsilon_1}. \tag{22}$$

Из (17), (22) имеем

$$\prod_{i=1}^{n} | x_{31}(P) - x_{3i}(Q) | < c(n)H^{-\eta_3 - r_1 + (n-1)\varepsilon_1}. \tag{23}$$

Аналогично оценим

$$\prod_{i=1}^{n} | x_{12}(P) - x_{1i}(Q) | <$$
$$< c(n)\prod_{i=1}^{n}(| x_{12}(P) - x_{11}(P) | + | x_{11}(P) - x_{11}(Q) | + | x_{11}(Q) - x_{1i}(Q) |) < c(n)H^{-l_2T^{-1} - p_1 + n\varepsilon_1}, \tag{24}$$

$$\prod_{i=1}^{n} | x_{22}(P) - x_{2i}(Q) | < c(n)H^{-s_2T^{-1} - q_1 + n\varepsilon_1}, \tag{25}$$

$$\prod_{i=1}^{n} | x_{32}(P) - x_{3i}(Q) | < c(n)H^{-b_2T^{-1} - r_1 + n\varepsilon_1}. \tag{26}$$

Поскольку многочлены *P(x)* и *Q(x)* из $P_t(\overline{s})$, они не имеют общих корней и модуль их результанта $| R(P,Q) | \geq 1$. Из (12), (19), (21)-(26) имеем

$$1 \leq | R(P,Q) | < c(n)2^{2tn}\prod_{1 \leq i,j \leq n} | x_i(P) - x_j(Q) | < c(n)2^{t(2n - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - 2p_1 - 2q_1 - 2r_1 - l_2T^{-1} - s_2T^{-1} - b_2T^{-1} + (6n-3)\varepsilon_1)} < c(n)2^{-2t\varepsilon_1}$$

Полученное неравенство при больших *t* противоречиво, что показывает, что параллелепипеды П, которым принадлежит более одного многочлена $P(x) \in P_t(\overline{s})$, не существуют.

Предложение 2. Если выполнены неравенства (8) и

$$4 - 0.5\varepsilon < l_2T^{-1} + p_1 + s_2T^{-1} + q_1 + b_2T^{-1} + r_1 < n - 1 + 6n\varepsilon_1, \tag{27}$$

то мера множества $L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равна нулю.

Доказательство. От системы неравенств (3) снова перейдем к системе неравенств (13). Положим

$$k = n + 1 - (l_2T^{-1} + p_1 + s_2T^{-1} + q_1 + b_2T^{-1} + r_1). \tag{28}$$

Предположим, что

$$\varepsilon < \{k\}. \tag{29}$$

Тогда из (27), (28), (29) получаем $n-[k]\geq 3$. Учитывая (8) и (27), можно считать, что выполняется по крайней мере одно из трех неравенств

$$l_2T^{-1}+p_1\leq\omega_1+\nu_1+1-2(n+1)\varepsilon_1, \tag{30}$$

$$s_2T^{-1}+q_1\leq\omega_2+\nu_2+1-2(n+1)\varepsilon_1, \tag{31}$$

$$b_2T^{-1}+r_1\leq\omega_3+\nu_3+1-2(n+1)\varepsilon_1. \tag{32}$$

Разобьем куб $[-3;3]\times[-3;3]\times[-3;3]$ на равные параллелепипеды П с ребрами $H^{-\sigma_1}$, $H^{-\sigma_2}$ и $H^{-\sigma_3}$. Если выполнено неравенство (30), а (31), (32) – нет, то положим

$$\sigma_1=l_2T^{-1}+2(n+1)\varepsilon_1,\ \sigma_2=s_2T^{-1},\ \sigma_3=b_2T^{-1}.$$

В случае выполнения всех неравенств положим

$$\sigma_1=l_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1,\ \sigma_2=s_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1,\ \sigma_3=b_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1.$$

Пусть, например, выполняются все три неравенства (30), (31), (32). Другие случаи рассматриваются аналогично. Пусть $N(П)$ число многочленов, принадлежащих П. Если $N(П)<c(n)H^{\nu}$, $\nu=k-1-0,1\varepsilon$, то суммарная мера тех $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in[-3;3]\times[-3;3]\times[-3;3]$, для которых хотя бы при одном $P(x)\in P_n(H,\overline{s})$ выполняется система неравенств (13), оценивается сверху величиной

$$c(n)H^{-\omega_1-\nu_1+p_1-\omega_2-\nu_2+q_1-\omega_3-\nu_3+r_1}H^{l_2T^{-1}+s_2T^{-1}+b_2T^{-1}+2(n+1)\varepsilon_1}H^{k-1-0,1\varepsilon}<c(n)H^{-1-0,1\varepsilon+(2n+2)\varepsilon_1}<c(n)H^{-1-\varepsilon_1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty}H^{-1-\varepsilon_1}$ сходится, то для окончания доказательства предложения 2 в этом случае достаточно применить лемму Бореля-Кантелли.

Предположим сейчас, что существуют такие параллелепипеды П, что $N(П)>c(n)H^{[k]-1}H^{\{k\}-0,1\varepsilon}$. Зафиксируем один из таких параллелепипедов П и занумеруем многочлены $P_1(x),\dots,P_m(x)$, принадлежащие П. Два таких многочлена

$$P_i(x)=Hx^n+a_{n-1}^{(i)}+\dots+a_1^{(i)}x+a_0^{(i)},\ P_j(x)=Hx^n+a_{n-1}^{(j)}+\dots+a_1^{(j)}x+a_0^{(j)},\ 1\leq i<j\leq m$$

объединим в один класс, если $a_{n-1}^{(i)}=a_{n-1}^{(j)},\dots,a_{n-[k]+1}^{(i)}=a_{n-[k]+1}^{(j)}$.

Применим принцип ящиков Дирихле. Так число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]-1}$, то среди $c(n)H^{\nu}$ многочленов существует не менее $c(n)H^{\{k\}-0,1\varepsilon}$, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем эти многочлены $P_0(x),\dots,P_l(x)$, $l=c(n)H^{\{k\}-0,1\varepsilon}$ и образуем новые многочлены

$$t_i=P_i(x)-P_0(x),\ i=1,\dots,l.$$

Все многочлены t_i различны, имеют степень не выше $n-[k]$ и высоту не более 2H. Разложим любой многочлен $P(x)$, принадлежащий П, в ряд Тейлора в окрестности корня $x_{11}(P)$

$$P(\omega_1) = P'(x_{11})(\omega_1 - x_{11}) + \frac{1}{2!}P''(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^n \quad (33)$$

Так как $P(x)$ принадлежит П, то существует такая точка $(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}) \in \Pi$, что

$$|P(\omega_{01})| < H^{-\omega_1 - v_1},\ |P(\omega_{02})| < H^{-\omega_2 - v_2},\ |P(\omega_{03})| < H^{-\omega_3 - v_3}.$$

Из (4) получаем

$$|\omega_{01} - x_{11}| < H^{-\omega_1 - v_1 - 1 + p_1},\ |\omega_{02} - x_{21}| < H^{-\omega_2 - v_2 - 1 + q_1},\ |\omega_{03} - x_{31}| < H^{-\omega_3 - v_3 - 1 + r_1}.$$

Тогда, если $(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}) \in \Pi$, то

$$|\omega_1 - \omega_{01}| < H^{-\sigma_1},\ |\omega_2 - \omega_{02}| < H^{-\sigma_2},\ |\omega_3 - \omega_{03}| < H^{-\sigma_3}.$$

Следовательно, имеем

$$|\omega_1 - x_{11}| < c(n)H^{-l_2 T^{-1} - (n+1)\varepsilon_1}, \quad (34)$$

$$|\omega_2 - x_{21}| < c(n)H^{-s_2 T^{-1} - (n+1)\varepsilon_1}, \quad (35)$$

$$|\omega_3 - x_{31}| < c(n)H^{-b_2 T^{-1} - (n+1)\varepsilon_1}. \quad (36)$$

Используя лемму 2 и (34), получим

$$|P'(x_{11})(\omega_1 - x_{11})| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}, \quad (37)$$

$$|P^{(i)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^i| < c(n)H^{1 - p_i + (n-i)\varepsilon_1} H^{-i l_2 T^{-1} - i(n+1)\varepsilon_1} < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1},\ i = 2, \ldots, n-1, \quad (38)$$

$$|P^{(n)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^n| < c(n)H^{1 - n l_2 T^{-1} - n(n+1)\varepsilon_1} < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \quad (39)$$

Из (33), (37), (38), (39) следует

$$|P(\omega_1)| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \quad (40)$$

Разлагая многочлен $P(x)$, принадлежащий П, в ряд Тейлора в окрестности корня $x_{21}(P)$ и в окрестности корня $x_{31}(P)$, аналогично получим

$$|P(\omega_2)| < c(n)H^{1 - q_1 - s_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}, \quad (41)$$

$$|P(\omega_3)| < c(n)H^{1 - r_1 - b_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \quad (42)$$

Поскольку неравенства (40), (41), (42) выполняются для любого $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$, принадлежащего П, то для любого многочлена $t_i(x)$, $1 \le i \le l$ выполняются неравенства

$$|t_i(\omega_1)| < c(n)H^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1},\ |t_i(\omega_2)| < c(n)H^{1 - q_1 - s_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1},\ |t_i(\omega_3)| < c(n)H^{1 - r_1 - b_2 T^{-1} - 2\varepsilon_1}. \quad (43)$$

Рассмотрим три возникающие возможности:

а) Все $t_i = a_i t(x)$, $a_i \in Z$. Тогда среди многочленов $t_i(x)$ существует многочлен $R(x)$, высота которого не превосходит $c(n)H^{1 - \{k\} + 0,1\varepsilon}$. Из (43) получаем

$$|R(\omega_1)|<c(n)H(R)^{\frac{1-p_1-l_2T^{-1}-2\varepsilon_1}{1-\{k\}+0,1\varepsilon}},\ |R(\omega_2)|<c(n)H(R)^{\frac{1-q_1-s_2T^{-1}-2\varepsilon_1}{1-\{k\}+0,1\varepsilon}},\ |R(\omega_3)|<c(n)H(R)^{\frac{1-r_1-l_2T^{-1}-2\varepsilon_1}{1-\{k\}+0,1\varepsilon}}.$$

Так как при выполнении (29)

$$\frac{p_1+l_2T^{-1}+q_1+s_2T^{-1}+r_1+b_2T^{-1}-3+6\varepsilon_1}{1-\{k\}+0,1\varepsilon}>n-[k]-1,$$

то для окончания доказательства в этом случае достаточно применить метрическую теорему из [3].

б) Среди $t_i(x)$ имеются приводимые. Применим лемму 12, поскольку

$$p_1+l_2T^{-1}+q_1+s_2T^{-1}+r_1+b_2T^{-1}-3+6\varepsilon_1>n-[k]-2.$$

в) Среди многочленов $t_i(x)$ имеются хотя бы два без общих корней. Тогда применим лемму 3. Здесь при условии (29) можно считать

$$\tau_1=p_1+l_2T^{-1}-1+2\varepsilon_1,\ \tau_2=q_1+s_2T^{-1}-1+2\varepsilon_1,\ \tau_3=r_1+b_2T^{-1}-1+2\varepsilon_1,$$
$$\eta_1=l_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1,\ \eta_2=s_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1,\ \eta_3=b_2T^{-1}+(n+1)\varepsilon_1.$$

Случай $0\le\{k\}\le\varepsilon$ требует незначительных изменений, связанных с выбором параметров.

Предложение 3. Если выполнены неравенства (8) и

$$\varepsilon<l_2T^{-1}+p_1+s_2T^{-1}+q_1+b_2T^{-1}+r_1<4-0,5\varepsilon, \tag{44}$$

то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Доказательство. Многочлены $P(x)=Hx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ из множества $P_n(H,\bar{s})$ объединим в один класс $P_n(H,\bar{s},\bar{c})$, если они имеют один и тот же вектор $\bar{c}=(a_{n-1},\ldots,a_3)$. Пусть $\sigma_1(P)$ – множество вещественных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_1-x_{11}|<2^nH^{-\omega_1}\Psi^{\nu_1}(H)|P'(x_{11})|^{-1},$$

$\sigma_2(P)$ – множество вещественных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_2-x_{21}|<2^nH^{-\omega_2}\Psi^{\nu_2}(H)|P'(x_{21})|^{-1},$$

$\sigma_3(P)$ – множество вещественных чисел ω_3, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_3-x_{31}|<2^nH^{-\omega_3}\Psi^{\nu_3}(H)|P'(x_{31})|^{-1},$$

$\tau_1(P)$ – множество вещественных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_1-x_{11}|<2^nH^{-\alpha_1}|P'(x_{11})|^{-1},$$

$\tau_2(P)$ – множество вещественных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_2-x_{21}|<2^nH^{-\alpha_2}|P'(x_{21})|^{-1},$$

$\tau_3(P)$ – множество вещественных чисел ω_3, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_3-x_{31}|<2^nH^{-\alpha_3}|P'(x_{31})|^{-1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбраны следующим образом

$$l_2T^{-1} + p_1 < 1+\alpha_1 - 0,2\varepsilon,\ s_2T^{-1} + q_1 < 1+\alpha_2 - 0,2\varepsilon,\ b_2T^{-1} + r_1 < 1+\alpha_3 - 0,2\varepsilon,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1,\ \alpha_1 \le \omega_1+\nu_1,\ \alpha_2 \le \omega_2+\nu_2,\ \alpha_3 \le \omega_3+\nu_3.$$

Ясно, что $\sigma_1(P) \subset \tau_1(P),\ \sigma_2(P) \subset \tau_2(P),\ \sigma_3(P) \subset \tau_3(P)$.

Из (4) получаем, что все $\omega_1 \in S(x_{11}),\ \omega_2 \in S(x_{21}),\ \omega_3 \in S(x_{31})$, удовлетворяющие неравенствам

$$|P(\omega_1)| < H^{-\omega_1}\Psi^{\nu_1}(H),\ |P(\omega_2)| < H^{-\omega_2}\Psi^{\nu_2}(H),\ |P(\omega_3)| < H^{-\omega_3}\Psi^{\nu_3}(H)$$

принадлежат множествам $\sigma_1(P), \sigma_2(P), \sigma_3(P)$, $\tau_1(P), \tau_2(P), \tau_3(P)$ соответственно. Пусть $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \tau_1(P) \times \tau_2(P) \times \tau_3(P)$. Тогда имеем

$$|P'(x_{11})(\omega_1 - x_{11})| < 2^n H^{-\alpha_1}, \tag{45}$$

$$|P^{(i)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^i| < c(n)H^{1-p_i+(n-i)\varepsilon_1}H^{-i\alpha_1-i+ip_1} < c(n)H^{-\alpha_1},\ i = 2,\dots,n-1, \tag{46}$$

$$|P^{(n)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^n| < c(n)H^{1-n\alpha_1-n+np_1} < c(n)H^{-\alpha_1}. \tag{47}$$

Из неравенств (45), (46), (47), используя разложение (33) многочлена $P(x)$, получаем при $\omega_1 \in \tau_1(P)$ $\quad |P(\omega_1)| < c(n)H^{-\alpha_1}$,

для $\omega_2 \in \tau_2(P),\ \omega_3 \in \tau_3(P)$ аналогично получим

$$|P(\omega_2)| < c(n)H^{-\alpha_2},\ |P(\omega_3)| < c(n)H^{-\alpha_3}.$$

Область $\Delta(P) = \tau_1(P) \times \tau_2(P) \times \tau_3(P)$ назовем несущественной, если в классе $P_n(H, \bar{s}, \bar{c})$ найдется такой многочлен $Q(x)$, что

$$\mu(\Delta(P) \cap \Delta(Q)) \ge \frac{1}{2}\mu\Delta(P).$$

В противном случае область $\Delta(P)$ будем называть существенной.

Если область $\Delta(P)$ существенна, то каждая точка $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in [-3;3]\times[-3;3]\times[-3;3]$ принадлежит не более чем восьми существенным областям и поэтому

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{c})} \mu\Delta(P) < 8 * 6^3.$$

Из неравенства $\mu(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)\times\sigma_3(P)) < \mu\Delta(P)H^{-n+3}\Psi(H)$ получаем

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{c})} \mu(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)\times\sigma_3(P)) < c(n)H^{-n+3}\Psi(H),$$

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s})} \mu(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)\times\sigma_3(P)) < c(n)\Psi(H).$$

Поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ сходится, то по лемме Бореля-Кантелли множество $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, попадающих в бесконечное число существенных областей $\Delta(P)$, имеет меру нуль.

Если область $\Delta(P)$ несущественна, то

$$|\tau_1(P)\cap\tau_1(Q)|\geq\frac{1}{2}|\tau_1(P)|,\ |\tau_2(P)\cap\tau_2(Q)|\geq\frac{1}{2}|\tau_2(P)|,\ |\tau_3(P)\cap\tau_3(Q)|\geq\frac{1}{2}|\tau_3(P)|,$$

и на интервалах $J_1=\tau_1(P)\cap\tau_1(Q)$, $J_2=\tau_2(P)\cap\tau_2(Q)$ и $J_3=\tau_3(P)\cap\tau_3(Q)$ многочлен $R(x)=P(x)-Q(x)$ удовлетворяет условиям

$$|R(\omega_1)|<c(n)H^{-\alpha_1},\ |R(\omega_2)|<c(n)H^{-\alpha_2},\ |R(\omega_3)|<c(n)H^{-\alpha_3},\ degR\leq 2. \qquad (48)$$

Если $|x_1(R)-x_2(R)|>\delta$, где δ произвольное, но фиксированное число, то высота многочлена $R(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$H(R)<c(n)|P'(x_{11})|,\ H(R)<c(n)|P'(x_{21})|,\ H(R)<c(n)|P'(x_{31})|. \qquad (49)$$

Из (44), (48), (49) получаем для $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in J_1\times J_2\times J_3$

$$|R(\omega_1)R(\omega_2)R(\omega_3)|<c(n)H^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}<c(n)H^{-1-\varepsilon}.$$

Далее, используя лемму 6 и метрическую теорему из [3], заключаем, что множество $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, попадающих в бесконечное число несущественных областей $\Delta(P)$, имеет меру нуль. В случае $|x_1(R)-x_2(R)|<\delta$ используем лемму 6 и лемму 10.

Предложение 4. Если выполнены неравенства (8) и

$$l_2T^{-1}+p_1+s_2T^{-1}+q_1+b_2T^{-1}+r_1<\varepsilon,$$

то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Доказательство. Многочлены $P(x)=Hx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ из множества $P_n(H,\overline{s})$ объединим в один класс $P_n(H,\overline{s},\overline{d})$, если они имеют один и тот же вектор $\overline{d}=(a_{n-1},\ldots,a_3)$. Определим $\sigma_1(P)$, $\sigma_2(P)$, $\sigma_3(P)$ как в предложении 3, а $\tau_1(P)$ как множество вещественных чисел ω_1, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_1-x_{11}|<2^{-n-1}(n+1)^{-1}|P'(x_{11})|^{-1},$$

$\tau_2(P)$ как множество вещественных чисел ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_2-x_{21}|<2^{-n-1}(n+1)^{-1}|P'(x_{21})|^{-1},$$

$\tau_3(P)$ как множество вещественных чисел ω_3, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_3-x_{31}|<2^{-n-1}(n+1)^{-1}|P'(x_{31})|^{-1},$$

Используя разложение (33) многочлена $P(x)$ в окрестности корня x_{11} и неравенство $|P^{(i)}(\omega_1)|<i!3^n(n+1)H,\ i=2,\ldots,n,$

для $\omega_1 \in [-3;3]$, получим

$$|P'(x_{11})(\omega_1 - x_{11})| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1},$$

$$|P^{(i)}(x_{11})(\omega_1 - x_{11})^i| < 3^n(n+1)H2^{-i(n+1)}(n+1)^{-i}H^{-i+\varepsilon i} < (n+1)^{-1}2^{-n-1},\ i = 2,\dots,n,$$

$$|P(\omega_1)| < 2^{-n-1},$$

аналогично для $\omega_2 \in [-3;3]$, получим $|P(\omega_2)| < 2^{-n-1}$,

для $\omega_3 \in [-3;3]$, получим $|P(\omega_3)| < 2^{-n-1}$.

Если область $\Delta(P)$ существенна, то из неравенства

$$\mu(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)\times\sigma_3(P)) \le \mu\Delta(P)H^{-n+3}\Psi(H)$$

получим

$$\sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s})} \mu(\sigma_1(P)\times\sigma_2(P)\times\sigma_3(P)) < c(n)\sum_{\bar{d}}\ \sum_{P(x)\in P_n(H,\bar{s},\bar{d})} \mu\Delta(P)H^{-n+3}\Psi(H) < c(n)\Psi(H).$$

Снова применим лемму Бореля-Кантелли.

Если область $\Delta(P)$ несущественна, то для многочлена $R(x) = P(x) - Q(x)$ имеем

$$|R(\omega_1)| < 2^{-n},\ |R(\omega_2)| < 2^{-n},\ |R(\omega_3)| < 2^{-n},\ degR(x) \le 1.$$

Отсюда заключаем, что мера указанных $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ не превосходит любого наперед заданного положительного числа. По лемме 6 множество $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, попадающих в бесконечное число несущественных областей, имеет меру нуль.

Предложение 5. Если выполнены неравенства (9), то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Доказательство предложения 5 незначительно отличается от доказательства предложения 8 из работы [8].

Предложение 6. Если выполнены неравенства (10) и

$$2-\omega_1-\nu_1-\omega_2-\nu_2-2(n-1)\varepsilon_1 \le b_2T^{-1}+r_1 \le \omega_3+\nu_3-1+2n\varepsilon_1,$$

то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Предложение 6 доказывается аналогично предложению 2.

Предложение 7. Если выполнены неравенства (10) и

$$b_2T^{-1}+r_1 \le \omega_3+\nu_3-1+2n\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon < b_2T^{-1}+r_1 < 2-\omega_1-\nu_1-\omega_2-\nu_2-2(n-1)\varepsilon_1,$$

то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Предложение 7 доказывается аналогично предложению 3.

Предложение 8. Если выполнены неравенства (10) и

$$b_2T^{-1}+r_1 \le \omega_3+\nu_3-1+2n\varepsilon_1,$$

$$b_2T^{-1}+r_1 < \varepsilon,$$

то мера множества $L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равна нулю.

Предложение 8 доказываются аналогично предложению 4.

Предложение 9. Если выполнены неравенства (10) и

$$\omega_3 + \nu_3 - 1 + 2n\varepsilon_1 < b_2 T^{-1} + r_1,$$

то мера множества $L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равна нулю.

Для доказательства предложения 9 требуется совместить рассуждения предложений 1 и 5.

Для анализа классов четвертого типа строятся оценки для величины

$$s_2 T^{-1} + q_1 + b_2 T^{-1} + r_1$$

и проводятся рассуждения, как для классов первого и третьего типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Спринджук В.Г.*** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – № 2. – С. 379-436.
2. ***Спринджук В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 194 с.
3. ***Берник В.И.*** Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных полиномов // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т.44. – № 1. – С. 24-45.
4. ***Спринджук В.Г.*** Метрические теоремы о диофантовых приближениях и приближения алгебраическими элементами ограниченной степени: Дисс.... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06. – Ленинград, 1963. – 98с.
5. ***Желудевич Ф.Ф.*** Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов. – Препринт / Институт математики АН БССР. – Мн., 1982. – 30 с.
6. ***Домбровский И.Р.*** Метрические характеристики совместных приближений нуля значениями многочленов с заданным числом совпадающих коэффициентов. – Препринт / Институт математики АН БССР. – Мн., 1990. – 39 с.
7. ***Переверзева Н.А.*** Совместное приближение нуля целочисленными взаимнопростыми многочленами в R^2 / Ред. журн. "Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук". – Мн., 1984. – 8с. - Деп. в ВИНИТИ 18.12.84, № 8095.
8. ***Берник В.И., Борбат В.Н.*** // Тр. мат. инст. им. В.А. Стеклова. 1997. – Т. 218. – С. 58-73.

SUMMARY

It has been proved that the system of inequalities

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-\omega_1}\Psi^{\upsilon_1}(H) \\ |P(\omega_2)| < H^{-\omega_2}\Psi^{\upsilon_2}(H) \\ |P(\omega_3)| < H^{-\omega_3}\Psi^{\upsilon_3}(H) \end{cases},$$

where $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = n - 3, \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 = 1$, *has only a finite number of solutions in polynomials* $P(x) \in Z[x]$ *for almost all* $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3$.