

# К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим нелинейное уравнение Ляпунова вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

где  $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $F \in C(D_\rho, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $I = [0, \omega]$ ,  $D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}$ ;  $\omega, \rho > 0$ . Предполагаем,

что функция  $F(t, X)$  удовлетворяет в  $D_p$  относительно  $X$  условию Липшица с постоянной  $L > 0$ . Это уравнение является обобщением хорошо известных дифференциальных уравнений Ляпунова, Рикати (см., например, [1–4]).

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \quad (2)$$

где  $M, N$  – вещественные  $(n \times n)$  – матрицы.

Задача (1), (2) мало изучена. Качественными методами она рассматривалась в [5]. С помощью конструктивных методов [6, гл.2, гл.4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [7, 8].

В данной работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [6, гл. 1].

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|, \\ \mu &= \max\{\|M\|, \|N\|\}, \quad \gamma = \|(M + N)^{-1}\|, \quad q = \gamma\mu(\alpha + \beta + L)\omega, \\ \|X\|_C &= \max_t \|X(t)\|, \end{aligned}$$

где  $t \in I$ ,  $\|\cdot\|$  – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с.21],  $C = C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$  – банахово пространство непрерывных  $(n \times n)$  – матриц.

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:  $\det(M+N) \neq 0$ ,  $q < 1$ ,  $\gamma\mu\omega h / (1-q) \leq \rho$ . Тогда в области  $D_p$  решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо как равномерный предел последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением.

Доказательство. Пусть  $X = X(t)$  – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau, \quad (3)$$

где  $t_0 \in I$ .

Запишем (3) в следующем виде:

$$X(t_0) = X(t) - \int_{t_0}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (4)$$

Используя (4), получим из (2):

$$\begin{aligned} (M + N)X(t) &= M \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \\ &- N \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда имеем матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} X(t) &= (M + N)^{-1} \left\{ M \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \right. \\ &\left. - N \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение уравнения (5) является решением задачи (1), (2). Это нетрудно показать с помощью приёмов, используемых в [6].

Для исследования разрешимости уравнения (5) воспользуемся принципом Банаха – Каччиопполи [10] сжимающих отображений. Запишем уравнение (5) в операторном виде

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (6)$$

где через  $\mathcal{L}$  обозначен соответствующий *интегральный* оператор в (5).

Для произвольной матрицы  $X(t)$ , принадлежащей шару  $\|X\|_C \leq \rho$ , имеем:

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}X \| &\leq \| (M + N)^{-1} \| \left\| M \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - N \int_t^\infty [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \gamma \left\{ M \int_0^t \| A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + |N| \int_t^\infty \| A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \| d\tau \right\} \leq \\ &\leq \gamma \mu \int_0^\infty \| A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \| d\tau \leq \\ &\leq \gamma \mu \int_0^\infty [\alpha \| X(\tau) \| + \beta \| X(\tau) \| + L \| X(\tau) \| + h] d\tau \leq \\ &\leq \gamma \mu (\alpha + \beta + L) \omega \| X \|_C + \gamma \mu \omega h \leq q\rho + \gamma \mu \omega h \leq \\ &\leq q\rho + (1 - q)\rho = \rho. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\| \mathcal{L}X \|_C \leq \rho. \quad (7)$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора  $\mathcal{L}$  на шаре  $\|X\|_C \leq \rho$ . Из (6) имеем для всех  $X, Y$  таких, что  $\|X\|_C \leq \rho, \|Y\|_C \leq \rho$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}X - \mathcal{L}Y &= \\ &= (M + N)^{-1} \left\{ M \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - N \int_t^\infty [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\} - \\ &\quad - (M + N)^{-1} \left\{ M \int_0^t [A(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B(\tau) + F(\tau, Y(\tau))] d\tau - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N \int_0^{\infty} [A(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B(\tau) + F(\tau, Y(\tau))] d\tau \Big\} = \\
& = (M + N)^{-1} \Big\{ M \int_0^t [A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))] d\tau - \\
& \quad - N \int_0^{\infty} [A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))] d\tau \Big\}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме в (8), получим

$$\begin{aligned}
\|LX - LY\| & \leq \|(M + N)^{-1}\| \Big\| M \int_0^t [A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))] d\tau - \\
& \quad - N \int_0^{\infty} [A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))] d\tau \Big\| \leq \\
& \leq \gamma \Big[ \|M\| \int_0^t \|A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))\| d\tau + \\
& \quad + \|N\| \int_0^{\infty} \|A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))\| d\tau \Big] \leq \\
& \leq \gamma \mu \int_0^{\infty} \|A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\
& \quad + (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))\| d\tau \leq \\
& \leq \gamma \mu \int_0^{\infty} [(\alpha + \beta + L)\|X(\tau) - Y(\tau)\|] d\tau \leq \\
& \leq \gamma \mu (\alpha + \beta + L) \omega \|X - Y\|_C = q \|X - Y\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|\mathcal{L}X - \mathcal{L}Y\|_C \leq q\|X - Y\|_C. \quad (9)$$

Соотношения (7), (9) являются условиями принципа Банаха – Каччиопполи применительно к (6). На основании этого принципа заключаем: уравнение (5) однозначно разрешимо в области  $D_\rho$ . Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Для построения решения  $X(t)$  этой задачи воспользуемся следующим методом последовательных приближений:

$$X_{k+1}(t) = (M + N)^{-1} \left\{ N \int_0^t [A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau - N \int_t^\infty [A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где  $X_0 \equiv 0$ .

Индукцией по  $k$  нетрудно показать, что  $\|X_k\|_C \leq \rho$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Получим оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (10):

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) - X_k(t) = & \\ = (M + N)^{-1} \left\{ M \int_0^t [A(\tau)(X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)) + (X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau))B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau - \right. & \\ - N \int_t^\infty [A(\tau)(X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)) + (X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau))B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau \left. \right\}, & \\ & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Выполнив оценки по норме в (11), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{k+1} - X_k\|_C \leq q\|X_k - X_{k-1}\|_C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Используя оценку (12), имеем

$$\|X - X_k\|_C \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1\|_C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

В заключение отметим, что используемый в работе [5] подход к задаче (1), (2) приводит к системе двух матричных уравнений относительно  $X(t)$ ,  $X(0)$  и таким же алгоритмам построения решения. Подход из [6], как видим, даёт одно соотношение вида (10).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. **Параев Ю.И.** Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
3. **Розо М.** Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

4. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. – М.:Наука, 1970. – 552с.
5. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.
6. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.
7. *Елисеенко М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.* // Труды третьей международной конференции «Дифференциальные уравнения и применения». Болгария, Руссе, 1987. – Ч.1. – С. 121-126.
8. *Лаптинский В.Н.* // Весці АН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 1997. – № 4. – С. 14-18.
9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.:Наука, 1967. – 472 с.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

## SUMMARY

*Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of a two-point boundary value problem for nonlinear Lyapunov equation are obtained.*