УДК 519.95:519.872

С.В. КРАВЧЕНКО

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИММЕТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И СИГНАЛАМИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с простейшим входящим потоком, экспо-ненциальным обслуживанием в узлах и марковской маршрутизацией, в которую наряду с обычными заявками могут поступать сигналы и в которой заявка после обслуживания с некоторой вероятностью может трансформироваться в сигнал. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах, время переключения с одного режима работы на другой имеет показательное распределение с параметром, зависящим от числа заявок в узле и от номера режима. Переключение происходит только на соседние режимы работы. Устанавливается условие эргодичности и находится стационарное распределение в мультипликативной форме.

1. Введение. В практических задачах можно найти примеры сетей массового обслуживания с ненадежными обслуживающими приборами (или приборами, работающими в разных режимах), в которых заявка перемещается по сети в зависимости от некоего внешнего события. Аналитические модели сетей, в которых кроме обычных заявок циркулируют еще и сигналы, изменяющие привычное движение заявок по сети, впервые ввел в рассмотрение Е.Геленбе в 1993 г. [1]. Сигнал, прибывающий в непустой узел, вынуждает заявку покидать узел (переходить в другой узел или уходить из сети). Вслед за Геленбе многие авторы начинают исследовать сети с сигналами. Так, Чао рассматривает сеть, в которой сигнал, поступающий в узел, заставляет заявку покинуть узел не в момент своего прихода, а через случайный промежуток времени [2].

Сеть, в которой приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в "щадящем" режиме, рассмотрена в [3]. В [4] исследуется сеть с отрицательными заявками и обслуживающими приборами, работающими в нескольких режимах.

В [5] рассматривается сеть массового обслуживания, где обслуживающие приборы также могут работать в нескольких режимах. Кроме того, добавляется возможность поступления в сеть сигналов, действующих случайное время, и возможность для обычных заявок трансформироваться в сигналы, что существенно отличает сеть от рассмотренных ранее. Вероятности перехода заявок зависят от того, покидает ли заявка узел после завершения обслуживания или после активизации сигнала.

В настоящей работе исследуется сеть с многорежимными стратегиями обслуживания и сигналами, в которой, в отличие от [5], интенсивность обслуживания прибором в узле зависит от числа заявок в узле. Рассматриваемая сеть является симметрической в силу того, что вероятности перехода заявки в другой узел как после завершения обслуживания, так и под воздействием сигнала, совпадают.

2. Постановка задачи. В открытую сеть массового обслуживания из N однолинейных узлов поступают два независимых стационарных пуассоновских потока: (обычных положительных) заявок с параметром λ^+ и сигналов с параметром λ^-. Каждая заявка входного потока заявок независимо от других заявок с вероятностью π_{0l}^+ направляется в l-ый узел, а каждый сигнал входного потока сигналов независимо от других с вероятностью π_{0l}^- направляется в l-ый узел $(l=\overline{1,N};\ \sum_{l=1}^{N}\pi_{0l}^+=1\ \sum_{l=1}^{N}\pi_{0l}^-=1)$. Время обслуживания заявки l-м узлом имеет показательное распределение с интенсивностью $\mu_l^+(k_l)$, зависящей от числа заявок в узле. После завершения обслуживания в l-м узле обслуженная заявка перемещается в m-й узел, оставаясь заявкой, с вероятностью p_{lm}^+, как сигнал с вероятностью p_{lm}^- и покидает сеть с вероятностью $p_{l0}=1-\sum_{m=1}^{N}(p_{lm}^+ + p_{lm}^-)$. Каждый сигнал, поступающий в l-ый узел, действует случайное время, имеющее показательное распределение с интенсивностью $\mu_l^-(n_l)$, зависящей от числа сигналов в l-м узле. По завершении периода действия сигнал с вероятностью p_{lm}^+ перемещает (положительную) заявку из узла l в узел m, оставляя ее положительной заявкой, с вероятностью p_{lm}^- перемещает (положительную) заявку из узла l в узел m, превращая ее в сигнал, с вероятностью p_{l0} уничтожает положительную заявку и пропадает; если в узле нет заявок, то сигнал исчезает [6].

В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в r_l+1 режимах. Время работы прибора l-го узла в режиме j_l $(1\le j_l\le r_l-1)$ имеет показательное распределение, причем с интенсивностью $\varphi_l(k_l,j_l)$ (зависящей от числа заявок k_l в узле и от номера режима j_l) прибор переходит в режим j_l-1, а с интенсивностью $\nu_l(k_l,j_l)$ (зависящей от числа заявок k_l в узле и от номера режима j_l) прибор переходит в режим j_l+1. Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_l(k_l,r_l)$, после чего прибор переходит в r_l-1-й режим. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок и число сигналов в узле не изменяется.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t)=(x_1(t),\dots,x_N(t))$, где $x_l(t)=(k_l,n_l,j_l)$ – состояние l-го узла в момент времени t. Здесь k_l – число заявок в l-м узле в момент времени t, n_l – число сигналов в l-м узле в момент времени t, j_l – номер режима работы прибора в l-м узле.

Основная цель работы – нахождение стационарного распределения марковского процесса $x(t)$.

3. **Изолированный узел в фиктивной окружающей среде.** Предположим, что все величины $\mu_l^+(k_l)$, $\mu_l^-(n_l)$, $\varphi_l(k_l,j_l)$, $\nu_l(k_l,j_l)$ строго положительны. Обозначим через α_l^+ среднюю интенсивность поступления положительных заявок в l-й узел, а через α_l^- среднюю интенсивность поступления сигналов в l-й узел. Эти интенсивности удовлетворяют следующей системе линейных уравнений трафика:

$$\alpha_l^+ = \lambda^+\pi_{0l}^+ + \sum_{k=1}^{N}\alpha_k^+ p_{kl}^+ , \qquad (1)$$

$$\alpha_l^- = \lambda^-\pi_{0l}^- + \sum_{k=1}^{N}\alpha_k^+ p_{kl}^- , \qquad l=\overline{1,N}. \qquad (2)$$

Из результата работы [6] следует, что система уравнений (1), (2) имеет единственное положительное решение. Везде далее будем подразумевать именно это положительное решение уравнений трафика (1)-(2).

Рассмотрим изолированный l-й узел в фиктивной окружающей среде, считая, что в него поступают два независимых пуассоновских потока: поток заявок с параметром α_l^+ и поток сигналов с параметром α_l^-, где α_l^+ и α_l^- – положительное решение системы уравнений трафика (1), (2). Окружающая среда является фиктивной потому, что в самой сети потоки заявок на ее узлы не являются простейшими.

Легко проверить, что стационарные вероятности состояний изолированного узла в фиктивной окружающей среде имеют вид:

$$p_l(k_l,n_l,j_l) = C_l\prod_{i=1}^{k_l}\frac{\alpha_l^+}{\alpha_l^- + \mu_l^+(i)}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)}\prod_{u=0}^{j_l}\frac{\nu_l(k_l,u)}{\varphi_l(k_l,u)}, \qquad (3)$$

где C_l находится их условия нормировки.

Для эргодичности изолированного узла достаточно выполнения условий:

$$\sum_{k_l=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{k_l}\frac{\alpha_l^+}{\alpha_l^- + \mu_l^+(s)} < \infty; \qquad \sum_{n_l=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)} < \infty;$$

$$\nu_l(k_l j_l) < M\varphi_l(k_l j_l),\ \ M<1,\ \forall k_l,j_l;\ \ \sup_{k_l,j_l}\nu_l(k_l,j_l) < \infty;\ \ l=\overline{1,N}. \qquad (4)$$

4. **Основной результат.** Пусть $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $x(t)$ из состояния x в состояние y, $q(x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)$ – интенсивность выхода процесса из состояния x, e_l – единичный вектор, у которого l-я координата равна 1. Очевидно, интенсивности перехода процесса $x(t)$ имеют вид:

$$q((k,n,j),(k+e_l,n,j)) = \lambda^+\pi_{0l}^+, \quad l=\overline{1,N}; \qquad (5)$$

$$q((k,n,j),(k,n+e_l,j)) = \lambda^-\pi_{0l}^-, \quad l=\overline{1,N}; \qquad (6)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n-e_l,j)) = \mu_l^-(n_l)p_{l0}I_{\{k_l\neq 0,n_l\neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \qquad (7)$$

$$q((k,n,j),(k,n-e_l,j)) = \mu_l^-(n_l)I_{\{n_l\neq 0\}}(I_{\{k_l=0\}} + p_{ll}^+I_{\{k_l\neq 0\}}), \quad l=\overline{1,N}; \qquad (8)$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n,j)) = (\mu_l^+(k_l)p_{l0} + \mu_l^-(n_l)p_{ll}^- I_{\{n_l \neq 0\}}) I_{\{k_l \neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{9}$$

$$q((k,n,j),(k-e_l+e_m,n,j)) = \mu_l^+(k_l)p_{lm}^+ I_{\{k_l \neq 0\}}, \quad l \neq m, \quad l,m=\overline{1,N}; \tag{10}$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n+e_m,j)) = \mu_l^+(k_l)p_{lm}^- I_{\{k_l \neq 0\}}, \quad l,m=\overline{1,N}; \tag{11}$$

$$q((k,n,j),(k-e_l+e_m,n-e_l,j)) = \mu_l^-(n_l)p_{lm}^+ I_{\{k_l \neq 0, n_l \neq 0\}}, \quad l \neq m, \quad l,m=\overline{1,N}; \tag{12}$$

$$q((k,n,j),(k-e_l,n-e_l+e_m,j)) = \mu_l^-(n_l)p_{lm}^- I_{\{k_l \neq 0. n_l \neq 0\}}, \quad l \neq m, \quad l,m=\overline{1,N}; \tag{13}$$

$$q((k,n,j),(k,n,j+e_l)) = \nu_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq r_l\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{14}$$

$$q((k,n,j),(k,n,j-e_l)) = \varphi_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{15}$$

и $q(x,y)=0$ для всех иных состояний y.

Интенсивность выхода получается сложением этих интенсивностей:

$$q(k,n,j) = \lambda^+ + \lambda^- + \sum_{l=1}^{N} \mu_l^-(n_l) I_{\{n_l \neq 0\}} + \sum_{l=1}^{N} \mu_l^+(k_l) I_{\{k_l \neq 0\}}(1-\pi_{ll}^+) + \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \nu_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq r_l\}} \tag{16}$$

Пусть $P^+ = (p_{ij}^+)$, $P^- = (p_{ij}^-)$, $P = P^+ + P^-$. Основной результат выражает следующая теорема.

Теорема. *Если для всех $l=\overline{1,N}$ выполняются условия (4) и матрица $P^+ = (p_{ij}^+)$ неприводима, то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его финальное стационарное распределение имеет форму произведения:*

$$p(k,n,j,) = \prod_{l=1}^{N} p_l(k_l,n_l,j_l), \tag{17}$$

где $p_l(k_l,n_l,j_l)$ – стационарное распределение изолированного l-го узла в фиктивной окружающей среде, определяемое с помощью соотношений (3).

Доказательство. Для доказательства того, что $p(k,n,j)$, определенные в (17), образуют стационарное распределение марковского процесса $x(t)$, достаточно [7, 8] подобрать функцию:

$$q^R: \ (X,X) \setminus \ \{(x,x), x \in X\} \to [0,\infty),$$

которая бы удовлетворяла соотношениям:

$$p(x)q^R(x,y) = p(y)q(y,x) \tag{18}$$

и

$$q^R(x) = \sum_{y \neq x} q^R(x,y) = \sum_{y \neq x} q(x,y) = q(x). \tag{19}$$

Если такие $q^R(x,y)$ удастся найти, то окажется, что $q^R(x,y)$ будут являться инфинитезимальными характеристиками перехода для обращенной во времени цепи Маркова $x(-t)$, а $p(x)$ – стационарными вероятностями для $x(t)$ и $x(-t)$. Положим:

$$q^R((k,n,j),(k-e_l,n,j)) = \frac{\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l)}{\alpha_l^+}\lambda^+ p_{0l}^+ I_{\{k_l \neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{20}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n-e_l,j)) = \frac{\mu_l^-(n_l)}{\alpha_l^-}\lambda^- p_{0l}^- I_{\{n_l \neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{21}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n+e_l,j)) = \frac{\alpha_l^+\alpha_l^-}{\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1)} p_{0l}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{22}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n+e_l,j)) = \alpha_l^-(I_{\{k_l=0\}} + p_{ll}^+ I_{\{k_l \neq 0\}}), \quad l=\overline{1,N}; \tag{23}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n,j)) = \frac{\alpha_l^+}{\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1)}(\mu_l^+(k_l+1)p_{l0} + \mu_l^-(n_l)p_{ll}^- I_{\{n_l \neq 0\}}), \; l=\overline{1,N}; \tag{24}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l-e_m,n,j)) = \frac{\alpha_l^+(\alpha_m^- + \mu_m^+(k_m))\mu_l^+(k_l+1)}{\alpha_m^+(\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1))} p_{lm}^+ I_{\{k_m \neq 0\}}, \; l \neq m, \; l,m=\overline{1,N}; \tag{25}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n-e_m,j)) = \frac{\alpha_l^+\mu_m^-(n_m)}{\alpha_m^-(\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1))}\mu_l^+(k_l+1) p_{lm}^- I_{\{n_m \neq 0\}}, \; l,m=\overline{1,N}; \tag{26}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l-e_m,n-e_l,j)) = \frac{\alpha_l^+(\alpha_m^- + \mu_m^+(k_m))\alpha_l^-}{\alpha_m^+(\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1))} p_{lm}^+ I_{\{k_m \neq 0\}}, \; l \neq m, \; l,m=\overline{1,N}; \tag{27}$$

$$q^R((k,n,j),(k+e_l,n+e_l-e_m,j)) = \frac{\alpha_l^+\alpha_l^-\mu_m^-(n_m)}{\alpha_m^-(\alpha_l^- + \mu_l^+(k_l+1))} p_{lm}^- I_{\{n_m \neq 0\}}, \; l \neq m, \; l,m=\overline{1,N}; \tag{28}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n,j-e_l)) = \varphi_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq 0\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{29}$$

$$q^R((k,n,j),(k,n,j+e_l)) = \nu_l(k_l,j_l) I_{\{j_l \neq r_l\}}, \quad l=\overline{1,N}; \tag{30}$$

для всех остальных состояний y положим $q^R(x,y)=0$. Для функции соотноше-ние (18) действи-тельно выполняется, что легко проверяется подстановкой в него равенств (5)-(15) и (20)-(30) и использования (3). Остается доказать (19). Складывая (20)-(30) (и учитывая уравнения трафика (1)-(2)), получим, что $q^R(x)=q(x)$ для всех состояний $x \in X$. Эргодичность марковского процесса докажем с помощью эргодической теоремы Фостера [9]. Решением системы уравнений:

$$x(k,n,j) = \sum_{\tilde{k},\tilde{n},\tilde{j}} x(\tilde{k},\tilde{n},\tilde{j}) \frac{q((\tilde{k},\tilde{n},\tilde{j}),(k,n,j))}{q(\tilde{k},\tilde{n},\tilde{j})}$$

является $x(k,n,j) = p(k,n,j)q(k,n,j)$ и ряд

$$\sum_{k,n,j} |x(k,n,j)| = \sum_{k,n,j} p(k,n,j)q(k,n,j)$$

сходится в силу (4).

5. Обсуждение результатов. В статье найдены условие эргодичности и стационарное распределение в мультипликативной форме марковского процесса $x(t)$, характеризующего состояния сети в момент времени t. Возможным обобщением результатов, полученных в настоящей статье, является случай, ко-гда в сеть кроме заявок и сигналов поступают сигналы увеличения и уменьшения режима работы обслуживающего прибора.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю.В.Малинковскому за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Gelenbe E.*** G-networks with triggered customer movement // Journal of Applied Probability . – 1993. Vol. 30. – pp. 742-748.
2. ***Chao Xiuli.*** A note on queueing networks with signals and random triggering times // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 1994. – Vol. 8. – pp.213-219.
3. ***Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю.*** Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАН РБ. Сер.фіз.-мат.навук. – 2001. – № 3. – С. 129-134.
4. ***Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю.*** Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями. – Известия ГГУ им.Ф.Скорины. – 2002. – № 6. – С.183-187.
5. ***Кравченко С.В.*** Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и сигналами // Вестник ГГТУ. – 2001. – № 4. – С. 20-25
6. ***Bocharov P.P.*** On Queueing Networks with Signals. Applied stochastic models and information processes: Memorial seminar dedicated to the 60th birthday of Vladimir Kalashnikov. Петрозаводск, 8-13 сентября 2002 г. – Петрозаводск, 2002. – С.27-30.
7. ***Henderson W., Pearce C.E., Pollet P.K., Taylor P.G.*** Connecting Internally Balanced Quasireversible Markov Processes // Adv.Appl. Probability. – 1992. – V.24. – No.4. – P.934-959.
8. ***Miayzawa M., Taylor P.G.*** A Geometric Product-Form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv.Appl. Probability. – 1997. – V.29. – No.2. – P.523-544.
9. ***Foster F.G.*** On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Process // Ann.Math.Statist. – 1953. – V.24. – No.2. – P.355-360.

SUMMARY

Open G-networks with ordinary positive customers and signals are considered. External arrival flows of positive customers and signals are independent Poisson processes. Service times of customers in the nodes have an exponential distribution. After completion of service a positive customer can pass to other node as a positive customer or as a signal or quit the network.

Every signal is processed (activated) for a random amount of time. This amount of time is an exponential random value that depends on the quantity of signals in the node. After completion of the activation period a signal can move a customer to other node as a customer or a signal or it can kill a customer and vanish. If there are not any positive customers at the node, an activated signal simply disappears.

The network is symmetrical because the customers quit a node after completion of service or after comple-tion of the activation period with the same probabilities.

A single server at every node can work in different regimes. The time of being in a certain regime has an exponential distribution with a rate which depends on the quantity of customers in the node and on the number of the regime.

The stationary state distributions are expressed in product form.