УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКЕ ЧИСЛА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Известно [1-3], что проблема расширения класса интегрируемых систем в частных производных является одной из актуальных задач теории солитонов. Ее решению посвящены многочисленные работы (см. литературу в [1-3]). В частности, в [4] построен (l+1)-мерный фундаментальный темный солитон многомерного уравнения Шредингера. В настоящей работе строятся солитонные решения двумерных систем вида

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s}+\chi_n u_n+\sum_{k,m=1}^{2} q_{km}^{(n)}|u_k|^2 u_m=0, \qquad n=1,2, \tag{1}$$

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s}+\sum_{k,m=1}^{2} q_{km}^{(n)}|u_k|^2 u_m=0, \qquad n=1,2, \tag{2}$$

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s}+\left(\sum_{k=1}^{2} q_{k}^{(n)}|u_k|^2\right)u_n=0, \qquad n=1,2, \tag{3}$$

где $p_{js}^{(n)}, \chi_n, q_{km}^{(n)}$ – произвольные действительные числа. Отметим, что для теории представляет интерес вопрос о числе решений систем (1)-(3).

1. Математический анализ совокупности простейших форм солитонных решений многомерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

Рассмотрим многомерное НУШ вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s}+\chi u+q|u|^2 u=0, \tag{4}$$

где p_{js}, χ, q – произвольные действительные числа. Солитонные решения простейшей формы уравнения (4) будем строить в виде

$$u(t,\xi)=v(\xi)\exp(i\gamma t), \quad \gamma\in R, \quad \xi\equiv\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_l x_l, \tag{5}$$

где $\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ – произвольные действительные числа. Подставляя (5) в (4), получим

$$Pv'' + hv + qv^3 = 0, \tag{6}$$

где $P \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\alpha_j\alpha_s$, $h \equiv \chi - \gamma$. Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$v(\xi) = [A + B\exp(\alpha\xi)][M + N\exp(\beta\xi)]^{-1}, \tag{7}$$

где $A, B, M, N, \alpha, \beta$ – произвольные действительные числа, причем $M > 0$, $N > 0$. Подставляя (7) в (6), получим

$$\begin{gathered}(hAM^2 + qA^3) + \exp(\alpha\xi)[PB\alpha^2M^2 + hBM^2 + 3qA^2B] + \exp(\beta\xi)[2h - P\beta^2]AMN + \\ + \exp((\alpha+\beta)\xi)[2P\alpha^2 - 2P\alpha\beta - P\beta^2 + 2h]BMN + \exp(2\alpha\xi)[3qAB^2] + \exp(2\beta\xi)\times \\ \times[P\beta^2 + h]AN^2 + \exp((\alpha+2\beta)\xi)[P(\alpha-\beta)^2 + h]BN^2 + \exp(3\alpha\xi)[qB^3] = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Исследуем уравнение (8) в зависимости от параметров $\alpha, \beta, A, B, M, N$. Если $\alpha = \beta$, то из (8) следует, что справедливы соотношения:

$$qA^2 = -hM^2, \quad qB^2 = -hN^2, \quad (P\alpha^2 - 2h)(BM - AN) = 0. \tag{9}$$

Этот факт позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.1 *Для того чтобы уравнение (4) имело решение вида*

$$u(t,\xi) = \frac{A + B\exp(\alpha\xi)}{M + N\exp(\alpha\xi)}\exp(i\gamma t), \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (9).

Исследуем систему (9). Нетрудно видеть, что параметры q, h должны иметь разные знаки. Обозначим $A/M = \lambda_1$, $B/N = \lambda_2$. Тогда уравнения (9) примут вид

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -\frac{h}{q}, \quad (P\alpha^2 - 2h)(\lambda_2 - \lambda_1) = 0. \tag{11}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\left(-\frac{h}{q}\right)^{1/2}$, то соотношения (11) будут выполнены, и мы получим решение уравнения (4)

$$u = \pm\left(-\frac{h}{q}\right)^{1/2}\exp(i\gamma t),$$

независящее от ξ . Это волна постоянной интенсивности (см. [5]). Если предположить, что $P\alpha^2 - 2h = 0$, то из (11) следует, что

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \left(-\frac{h}{q}\right)^{1/2}.$$

В этом случае параметры A, B могут иметь разные знаки. Удобно считать, что параметр B имеет знак плюс, а параметр A – знак минус. Например, $A=-1$, $B=1$. Тогда решение (10) примет вид (считаем для простоты $M=N=1$)

$$u(t,\xi) = \frac{\exp(\alpha\xi) - 1}{\exp(\alpha\xi) + 1}\exp(i\gamma t) = th\left(\frac{1}{2}\alpha\xi\right)\exp(i\gamma t),$$

который и совпадает с "темным" солитоном простейшей формы (см. [5]). Вообще говоря, в ситуации, когда параметры А, В имеют разные знаки, решение (10) имеет вид

$$u(t,\xi)=\left(-\frac{h}{q}\right)^{1/2}\frac{N\exp(\alpha\xi)-M}{N\exp(\alpha\xi)+M}\exp(i\gamma t)=\left(-\frac{h}{q}\right)^{1/2} th\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha\xi+\ln\frac{N}{M}\right)\right\}\exp(i\gamma t).$$

Если $\beta=2\alpha$, то из (8) следует, что справедливы соотношения:

$$A=0,\quad P\alpha^2=-h,\quad qB^2=-8hMN. \tag{12}$$

В этом случае решение уравнения (4) принимает вид

$$u(t,\xi)=\frac{B\exp(\alpha\xi)}{M+N\exp(2\alpha\xi)}\exp(i\gamma t). \tag{13}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1.2 *Для того чтобы уравнение (4) имело решение вида (13), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$P\alpha^2=-h,\quad qB^2=-8hMN.$$

В остальных случаях (т.е. когда $\beta=m\alpha$, $m=3,4,\dots$) уравнение (6) нетривиальных (зависящих от ξ) решений вида (7) не имеет, что проверяется элементарным образом. Заметим, что решение (13) можно привести к виду

$$u(t,\xi)=\frac{B}{2\sqrt{MN}}\frac{1}{ch\left(\alpha\xi+\frac{1}{2}\ln\frac{N}{M}\right)}\exp(i\gamma t),$$

который и совпадает со "светлым" солитоном простейшей формы (см. [5]).

Таким образом, уравнение (4) может иметь из всей совокупности решений вида

$$u(t,\xi)=\frac{A+B\exp(\alpha\xi)}{M+N\exp(\beta\xi)}\exp(i\gamma t)$$

только "темные" и "светлые" солитоны простейшей формы.

2. Математический анализ совокупности сложных форм солитонных решений многомерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

Рассмотрим многомерное НУШ вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_s}+\chi u+q|u|^2u=0, \tag{4}$$

где p_{js}, χ, q – произвольные действительные числа. Для исследования солитонных решений уравнения (4) сделаем замену

$$u(t,\vec{x})=v(t,\vec{x})e^{i\chi t},\quad \vec{x}\in R^l, \tag{14}$$

где $v(t,\vec{x})$ – вообще говоря, неизвестная комплекснозначная функция. Подставляя (14) в (4), получим

$$i\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_s} + q|v|^2 v = 0\,. \tag{15}$$

Солитонное решение уравнения (15) сложной формы типа bright soliton будем строить в виде (ср. с [6])

$$v(t,\vec{x}) = ce_1(r + Ae_2)^{-1}, \tag{16}$$

$$e_1 \equiv \exp\left\{\alpha_0 t + \sum_{s=1}^{l}\alpha_s x_s + h + i\left(\beta_0 t + \sum_{s=1}^{l}\beta_s x_s + \theta\right)\right\},$$

$$e_2 \equiv \exp\left\{2\alpha_0 t + 2\sum_{s=1}^{l}\alpha_s x_s + 2h\right\},$$

где $c, r, A, \alpha_0, \alpha_s, h, \beta_0, \beta_s, \theta$ – произвольные действительные числа, причем $c > 0, r > 0, A > 0$. Подставляя (16) в (15), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha_0 = -P_{12}, \qquad \beta_0 = P_{11} - P_{22}, \qquad qc^2 = 8AP_{11}r\,, \tag{17}$$

$$P_{11} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\alpha_j\alpha_s, \qquad P_{12} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}(\alpha_j\beta_s + \beta_j\alpha_s), \qquad P_{22} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\beta_j\beta_s\,.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1 *Для того чтобы уравнение (15) имело решение (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (17).*

Отметим, что при l=1, т.е. в случае одномерной модели, полученные результаты совпадают с результатами работы [7].

(l+1)-мерный фундаментальный темный солитон уравнения (15) строится в виде (см. [4])

$$v(t,\vec{x}) = e_1(Me + R)(me + r)^{-1}, \tag{18}$$

$$e_1 \equiv \exp\left\{i\left(\alpha t + \sum_{s=1}^{l}\beta_s x_s + \theta\right)\right\}, \qquad e \equiv \exp\left\{\gamma t + \sum_{s=1}^{l}\varepsilon_s x_s + \varphi\right\},$$

где $m, r, R, \alpha, \beta_s, \theta, \gamma, \varepsilon_s, \varphi$ – произвольные действительные числа, $M = m_1 + im_2$ – произвольное комплексное число, причем $m > 0, r > 0, R > 0$. Подставляя (18) в (15), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha + P_{11} = q\left(\frac{R}{r}\right)^2, \qquad \alpha + P_{11} = q\left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{m^2}\right),$$

$$r^2 m_2(\alpha + P_{11}) + (mrR - r^2 m_1)(\gamma + P_{12}) = r^2 m_2 P_{22} + qR^2 m_2\,,$$

$$(r^2 m_1 + 2mrR)(\alpha + P_{11}) + r^2 m_2(\gamma + P_{12}) + (mrR - r^2 m_1)P_{22} = 3qR^2 m_1\,, \tag{19}$$

$$2mrm_2(\alpha + P_{11}) + (\gamma + P_{12})(m^2 R - mrm_1) + mrm_2 P_{22} = 2qRm_1 m_2\,,$$

$$(\alpha + P_{11})(m^2 R + 2mrm_1) + mrm_2(\gamma + P_{12}) + P_{22}(mrm_1 - m^2 R) = q\left(3Rm_1^2 + Rm_2^2\right),$$

где $P_{11} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\beta_j\beta_s, \quad P_{12} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}(\beta_j\varepsilon_s + \varepsilon_j\beta_s), \quad P_{22} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\varepsilon_j\varepsilon_s$.

Следовательно, справедлива

Теорема 2.2 *Для того чтобы уравнение (15) имело решение (18), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (19).*

Анализ разрешимости уравнений (19) проведен в [4].

В заключение этого обзора отметим, что вопрос о существовании новых форм солитонных решений уравнения (4) остается открытым.

3. Построение многомерных "светлых" солитонов простейшей формы двумерной системы связанных НУШ

Рассмотрим двумерную систему связанных НУШ вида

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s} + \chi_n u_n + \sum_{k,m=1}^{2} q_{km}^{(n)} |u_k|^2 u_m = 0, \quad n = 1, 2, \tag{1}$$

где $p_{js}^{(n)}, \chi_n, q_{km}^{(n)}$ – произвольные действительные числа. Будем искать решение системы (1) в виде

$$u_n(t,\xi) = \lambda_n ch^{-1}(\xi)\exp(i\gamma t), \quad \xi \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_l x_l, \quad n = 1, 2, \tag{2θ}$$

где $\lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \gamma$ – произвольные действительные числа. Подставляя (2θ) в (1), получим следующие дисперсионные уравнения:

$$\gamma - \chi_n = P^{(n)}, \quad P^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \alpha_j \alpha_s, \quad n = 1, 2, \tag{21}$$

$$2(\gamma - \chi_n)\lambda_n = \sum_{k,m=1}^{2} q_{km}^{(n)} \lambda_k^2 \lambda_m, \quad n = 1, 2. \tag{22}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1 *Для того чтобы система (1) имела решение вида (20), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (21), (22).*

Уравнения (21) не вызывают затруднений, так как число параметров больше числа уравнений. Изучим систему (22). С этой целью перепишем ее в виде

$$\begin{cases} q_{11}^{(1)}\lambda_1^3 + q_{12}^{(1)}\lambda_1^2\lambda_2 + q_{21}^{(1)}\lambda_1\lambda_2^2 + q_{22}^{(1)}\lambda_2^3 = 2(\gamma - \chi_1)\lambda_1, \\ q_{11}^{(2)}\lambda_1^3 + q_{12}^{(2)}\lambda_1^2\lambda_2 + q_{21}^{(2)}\lambda_1\lambda_2^2 + q_{22}^{(2)}\lambda_2^3 = 2(\gamma - \chi_2)\lambda_2. \end{cases} \tag{23}$$

Обозначим

$$\gamma - \chi_1 \equiv \mu_1, \quad \gamma - \chi_2 \equiv \mu_2, \quad \theta = \lambda_1/\lambda_2, \quad h = \mu_1/\mu_2.$$

Тогда система (23) примет вид

$$P_4^{(1,2)}(\theta) \equiv q_{11}^{(2)} h\theta^4 + \left(q_{12}^{(2)}h - q_{11}^{(1)}\right)\theta^3 + \left(q_{21}^{(2)}h - q_{12}^{(1)}\right)\theta^2 + \left(q_{22}^{(2)}h - q_{21}^{(1)}\right)\theta - q_{22}^{(1)} = 0, \tag{24}$$

$$\lambda_1^2 = 2\mu_1\theta^3\left[q_{11}^{(1)}\theta^3 + q_{12}^{(1)}\theta^2 + q_{21}^{(1)}\theta + q_{22}^{(1)}\right]^{-1}. \tag{25}$$

Из нее следует, что для нахождения искомых параметров λ_1, λ_2 надо решить алгебраическое уравнение четвертой степени (24) относительно θ и поочередно подставить найденные корни в уравнение (25). В силу основной теоремы алгебры уравнение (24) может иметь, самое большое, четыре различных действительных корня, если $q_{11}^{(2)} \neq 0$ и $h \neq 0$. Это значит, что максимальное число решений вида (20) системы (1) равно восьми при заданных параметрах $\gamma, \chi_1, \chi_2, p_{js}^{(n)}, q_{km}^{(n)}$. Подчеркнем, что этот результат относится к невырожденному случаю.

Рассмотрим важный частный случай системы (1), когда она имеет вид

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s} + \chi_n u_n + \left(\sum_{k=1}^{2} q_k^{(n)} |u_k|^2\right) u_n = 0, \qquad n = 1, 2, \qquad (26)$$

где $p_{js}^{(n)}, \chi_n, q_k^{(n)}$ – произвольные действительные числа. Решение системы (26) можно строить в более общей форме, чем (20),

$$u_n(t,\xi) = \lambda_n ch^{-1}(\xi)\exp(i\gamma_n t), \qquad \xi \equiv \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_l x_l, \qquad n = 1, 2, \qquad (27)$$

где $\lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \gamma_n$ – произвольные действительные числа. Подставляя (27) в (26), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\gamma_n - \chi_n = P^{(n)}, \qquad P^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \alpha_j \alpha_s, \qquad (28)$$

$$2(\gamma_n - \chi_n) = \sum_{k=1}^{2} q_k^{(n)} \lambda_k^2. \qquad (29)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.2 *Для того чтобы система (26) имела решение вида (27), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (28), (29).*

Их анализ не вызывает затруднений, так как система (29) является линейной алгебраической системой относительно λ_k^2.

4. Построение многомерных "темных" солитонов простейшей формы двумерной системы связанных НУШ

Будем строить решение системы (1) в виде

$$u_n(t,\xi) = \lambda_n \frac{\exp(\xi) - 1}{\exp(\xi) + 1} \exp(i\gamma t), \qquad \xi \equiv \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_l x_l, \qquad n = 1, 2, \qquad (30)$$

где $\lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \gamma$ – произвольные действительные числа. Подставляя (30) в (1), получим следующие дисперсионные уравнения:

$$2(\chi_n - \gamma) = P^{(n)}, \qquad P^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \alpha_j \alpha_s, \qquad (31)$$

$$\lambda_n(\gamma - \chi_n) = \sum_{k,m=1}^{2} q_{km}^{(n)} \lambda_k^2 \lambda_m, \qquad n = 1, 2. \qquad (32)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Для того чтобы система (1) имела решение вида (30), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (31), (32).*

Исследование уравнений (31), (32) аналогично исследованию уравнений (21), (22). Поэтому можно утверждать, что максимальное число решений вида (30) системы (1) равно восьми в невырожденном случае.

Для системы (26) решение можно строить в более общей форме, чем (30), а именно,

$$u_n(t,\xi)=\lambda_n\frac{\exp(\xi)-1}{\exp(\xi)+1}\exp(i\gamma_n t),\qquad n=1,2, \tag{33}$$

где $\lambda_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\gamma_n$ – произвольные действительные числа. Подставляя (33) в (26), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{gathered}2(\chi_n-\gamma_n)=P^{(n)},\qquad P^{(n)}\equiv\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\alpha_j\alpha_s,\\ \gamma_n-\chi_n=\sum_{k=1}^{2}q_k^{(n)}\lambda_k^2,\qquad n=1,2.\end{gathered} \tag{34}$$

Теорема 4.2 *Для того чтобы система (26) имела решение (33), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (34).*

5. Построение многомерных "светлых" солитонов сложной формы двумерной системы связанных НУШ

Рассмотрим двумерную систему связанных НУШ

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t}+\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j\partial x_s}+\sum_{k,m=1}^{2}q_{km}^{(n)}|u_k|^2u_m=0,\qquad n=1,2, \tag{2}$$

где $p_{js}^{(n)}$, $q_{km}^{(n)}$ – произвольные действительные числа. Решение системы (2) будем строить в виде

$$u_n(t,\vec{x})=\lambda_n\exp\left\{i\left(\varepsilon t+\sum_{s=1}^{l}\gamma_s x_s+\theta\right)\right\}ch^{-1}\left(\alpha t+\sum_{i=1}^{l}\beta_i x_i+h\right),\qquad n=1,2, \tag{35}$$

где $\lambda_n,\varepsilon,\gamma_s,\theta,\alpha,\beta_i,h$ – произвольные действительные числа. Подставляя (35) в (2), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha+I_{12}^{(n)}+I_{21}^{(n)}=0,\qquad -\varepsilon-I_{11}^{(n)}+I_{22}^{(n)}=0,\qquad n=1,2, \tag{36}$$

$$\sum_{k,m=1}^{2}q_{km}^{(n)}\lambda_k^2\lambda_m=2\lambda_n I_{22}^{(n)}, \tag{37}$$

$$I_{11}^{(n)}\equiv\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\gamma_j\gamma_s,\quad I_{12}^{(n)}\equiv\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\gamma_j\beta_s,\quad I_{21}^{(n)}\equiv\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\beta_j\gamma_s,\quad I_{22}^{(n)}\equiv\sum_{j,s=1}^{l}p_{js}^{(n)}\beta_j\beta_s.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1 *Для того чтобы система (2) имела решение (35), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (36), (37).*

Анализ уравнений (36), (37) проводится также как и уравнений (21), (22). Поэтому можно утверждать, что максимальное число решений вида (35) системы (2) равно восьми в невырожденном случае. Отметим, что при $l=1$, т.е. в случае одномерной модели, полученные результаты совпадают с результатами работы [7].

Для системы (3), которая является частным случаем системы (2), решение можно строить в более общей форме, чем (35), а именно,

$$u_n(t,\vec{x}) = \lambda_n \exp\left\{i\left(\varepsilon_n t + \sum_{s=1}^{l} \gamma_s^{(n)} x_s + \theta_n\right)\right\} ch^{-1}\left(\alpha t + \sum_{s=1}^{l} \beta_s x_s + h\right), \quad n = 1,2, \quad (38)$$

где $\lambda_n, \varepsilon_n, \gamma_s^{(n)}, \theta_n, \alpha, \beta_s, h$ – произвольные действительные числа. Подставляя (38) в (3), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_n = I_{22}^{(n)} - I_{11}^{(n)}, \quad \sum_{k=1}^{2} q_k^{(n)} \lambda_k^2 = 2I_{22}^{(n)}, \quad n = 1,2, \quad (39)$$

где

$$I_{11}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \gamma_j^{(n)} \gamma_s^{(n)}, \quad I_{12}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \gamma_j^{(n)} \beta_s, \quad I_{21}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \beta_j \gamma_s^{(n)},$$

$$I_{22}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \beta_j \beta_s.$$

Теорема 5.2 *Для того чтобы система (3) имела решение (38), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (39).*

Анализ соотношений (39) не вызывает затруднений, т.к. число параметров больше числа уравнений, а система уравнений относительно λ_k^2 является линейной.

6. Построение многомерных "темных" солитонов сложной формы двумерной системы связанных НУШ

Рассмотрим двумерную систему связанных НУШ

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_s} + \left(\sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} |u_m|^2\right) u_n = 0, \quad n = 1,2, \quad (3)$$

где $p_{js}^{(n)}, q_m^{(n)}$ – произвольные действительные числа. Решение системы (3) будем строить в виде

$$u_n(t,\vec{x}) = e_n(M_n e + R_n)(1+e)^{-1}, \quad n = 1,2, \quad (40)$$

$$e_n \equiv \exp\left\{i\left(\alpha_n t + \sum_{s=1}^{l} \beta_s^{(n)} x_s + \theta_n\right)\right\}, \quad e \equiv \exp\left\{\gamma t + \sum_{s=1}^{l} \varepsilon_s x_s + \varphi\right\}, \quad n = 1,2,$$

где $\alpha_n, \beta_s^{(n)}, \theta_n, \gamma, \varepsilon_s, \varphi, R_n > 0$ – произвольные действительные числа, $M_n \equiv \mu_n + ik_n$ – произвольные комплексные числа. Подставляя (40) в (3), получим следующую систему дисперсионных уравнений относительно неизвестных параметров M_n, R_n:

$$\alpha_n + I_{11}^{(n)} = \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} R_m^2, \quad \alpha_n + I_{11}^{(n)} = \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} \left(\mu_m^2 + k_m^2\right),$$

$$(\mu_n - R_n)\left(\gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}\right) + k_n I_{22}^{(n)} = 0,$$

$$-k_n\left(\gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}\right) + \mu_n I_{22}^{(n)} - R_n\left(2\alpha_n + 2I_{11}^{(n)} + I_{22}^{(n)}\right) + 2R_n \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} \mu_m R_m = 0,$$

$$-k_n\left(2\alpha_n + 2I_{11}^{(n)} + I_{22}^{(n)}\right) + \mu_n\left(\gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}\right) - \qquad (41)$$

$$-R_n\left(\gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}\right) + 2k_n \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} \mu_m R_m = 0,$$

$$-k_n\left(\gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}\right) - \mu_n\left(2\alpha_n + 2I_{11}^{(n)} + I_{22}^{(n)}\right) + R_n I_{22}^{(n)} + 2\mu_n \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} \mu_m R_m = 0,$$

$$I_{11}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \beta_j^{(n)} \beta_s^{(n)}, \quad I_{12}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \beta_j^{(n)} \varepsilon_s, \quad I_{21}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \varepsilon_j \beta_s^{(n)},$$

$$I_{22}^{(n)} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}^{(n)} \varepsilon_j \varepsilon_s, \qquad n = 1, 2.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6.1. *Для того чтобы система (3) имела решение (40), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (41).*

Дисперсионные уравнения (41) приводятся к следующему виду:

$$\sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} R_m^2 = \alpha_n + I_{11}^{(n)}, \quad \sum_{m=1}^{2} q_m^{(n)} (\mu_m R_m) = \alpha_n + I_{11}^{(n)} + H_n,$$

$$\frac{R_n}{k_n} = \frac{\rho_n^2 + H_n^2}{2H_n \rho_n}, \quad \frac{\mu_n}{k_n} = \frac{\rho_n^2 - H_n^2}{2H_n \rho_n}, \qquad (42)$$

где

$$\rho_n \equiv \gamma + I_{12}^{(n)} + I_{21}^{(n)}, \quad H_n \equiv I_{22}^{(n)}, \quad n = 1, 2.$$

Анализ дисперсионных уравнений (42) уже не вызывает принципиальных затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Абловиц М., Сигур Х.*** Солитоны и метод обратной задачи. – М., 1987.
2. ***Takayuki Tsuchida, Miki Wadati.*** Complete integrability of derivative nonlinear Schrodinger-type equations // Inverse Problems. 1999. – P.1-14.

3. ***Dubrovsky V.G., Formusatik I.B.*** The construction of exact rational solutions with constant asymptotic values at infinity of two-dimensional NVN integrable nonlinear evolution equations via the $\overline{\partial}$-dressing method // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. – V.34. – P.1837-1851.
4. ***Жестков С.В.*** О существовании $(l+1)$-мерного фундаментального темного солитона // Докл. НАН Беларуси. 2002. – Т.46. – № 3. – С.68-70.
5. Труды ИО ФАН. Волоконная оптика. – Т. 23. – М., 1990.
6. ***Жестков С.В.*** О построении точных решений многомерных нелинейных уравнений в частных производных современной математической физики // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2000. – № 4(7). – С. 66-76.
7. ***Жестков С.В., Кувшинов В.И.*** Обобщение метода Хироты на системы связанных нелинейных уравнений Шредингера второго порядка // Докл. НАН Беларуси. 2000. – Т. 44. – № 5. – С. 51-55.

SUMMARY

For the systems of second order of multidimensional coupled nonlinear Schrodinger equations the one-soliton solutions of simple and complex form are constructed. The necessary and sufficient conditions these solutions existence are obtained.