УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

n-АРНЫЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

При изучении n-арных групп важную роль играют введенные Дёрнте [1] инвариантные и полуинвариантные n-арные подгруппы, являющиеся n-арными аналогами нормальных подгрупп в группе. Еще одним n-арным аналогом нормальных подгрупп является предложенное автором [2] понятие m-полуинвариантной n-арной подгруппы, включающее в себя инвариантные и полуинвариантные n-арные подгруппы при m = 2 и m = n соответственно.

В данной работе определяются и изучаются новые n-арные аналоги нормальных подгрупп, отличные от указанных выше.

1. Определение (Дёрнте). n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > называется инвариантной в ней, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{i-1}\,x\,\underbrace{B\ldots B}_{n-i}]$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$.

2. Определение (Дёрнте). n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > называется полуинвариантной в ней, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$.

Ясно, что всякая инвариантная в < A, [ ] > n-арная подгруппа будет и полуинвариантной в < A, [ ] >. В то же время при $n \geq 3$ существуют n-арные группы, содержащие полуинвариантные n-арные подгруппы, не являющиеся инвариантными. Это означает, что при $n \geq 3$ понятие полуинвариантности n-арных подгрупп шире понятия их инвариантности.

Введем еще одно n-арное обобщение нормальных подгрупп.

3.Определение. n-Арная подгруппа < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > называется нормальной в ней, если

$$[xx_1\ldots x_{n-2}B] = [Bx_1\ldots x_{n-2}x]$$

для любых $x_1, \ldots, x_{n-2}, x \in A$.

При n = 2 все три понятия: инвариантности, полуинвариантности и нормальности совпадают с понятием нормальности для подгрупп.

Ясно, что каждая n-арная группа инвариантна, нормальна и полуинвариантна в самой себе.

4. Предложение. Если < B, [ ] > – нормальная n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >, то она и полуинвариантна в < A, [ ] >.

Доказательство. Из определения 3 следует

$$[x\underbrace{b\ldots b}_{n-2}B] = [B\underbrace{b\ldots b}_{n-2}x]$$

для любого $b \in B$, откуда

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x].$$

Предложение доказано.

Пусть < A, [ ] > полуабелева n-арная группа, т.е. n-арная группа, удовлетворяющая тождеству

$$[xx_1 \ldots x_{n-2}y] = [yx_1 \ldots x_{n-2}x].$$

Если < B, [ ] > – n-арная подгруппа в < A, [ ] >, то

$$[xx_1 \ldots x_{n-2}B] = \{[xx_1 \ldots x_{n-2}b] \mid b \in B\} = \{[bx_1 \ldots x_{n-2}x] \mid b \in B\} = [Bx_1 \ldots x_{n-2}x],$$

т.е. < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >. Таким образом, имеет место

5. Предложение. В полуабелевой n-арной группе все ее n-арные подгруппы являются нормальными.

Из предложений 4 и 5 следует известное утверждение о полуинвариантности всех n-арных подгрупп в полуабелевой n-арной группе.

В качестве n-арной группы из предложения 5 можно взять при n=3, например, полуабелеву тернарную группу < B_n, [ ] > всех отражений правильного n-угольника [3].

Так как в < B_3, [ ] > все три тернарные подгруппы первого порядка не являются инвариантными, то из сказанного выше следует, что при $n \geq 3$ существуют n-арные группы, обладающие нормальными n-арными подгруппами, не являющимися инвариантными.

А существуют ли при $n \geq 3$ n-арные группы, обладающие инвариантными n-арными подгруппами, которые не являются нормальными? Положительный ответ на этот вопрос дает следующий

6. Пример. Рассмотрим тернарную группу < S_4, [ ] >, производную от симметрической группы S_4 на четырех символах. Так как четверная группа Клейна

$$V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

нормальна в группе S_4, то тернарная группа < V_4, [ ] > инвариантна в < S_4, [ ] > (см. пример 5.3[4]). Тогда из

$$[V_4(12)(13)] = \{(123), (134), (243), (142)\}$$

вытекает $(13)(12) = (132) \notin [V_4(12)(13)]$. А так как $(13)(12) \in [(13)(12)V_4]$, то $[(13)(12)V_4] \neq [V_4(12)(13)]$. Следовательно, инвариантная в < S_4, [ ] > тернарная подгруппа < V_4, [ ] > не является нормальной в < S_4, [ ] >.

Отметим, что даже одноэлементная n-арная подгруппа, инвариантная в содержащей ее n-арной группе, может не быть нормальной в этой же n-арной группе. Об этом свидетельствует следующий

7. Пример. Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, производная от группы A с центром $Z(A) \neq A$. Если e – единица группы A, то < E = {e}, [ ] > – инвариантная n-арная подгруппа в < A, [ ] >. Если $x \notin Z(A)$, то существует $y \in A$ такой, что $xy \neq yx$. Тогда $[xyE] \neq [Eyx]$. Следовательно, инвариантная в < A, [ ] > – n-арная подгруппа < E, [ ] > не является нормальной в < A, [ ] >.

В качестве группы A из примера 7 можно взять, например, симметрическую группу $S_m(m \geq 3)$, знакопеременную группу $A_m(m \geq 4)$ или диэдральную группу $D_m(m \geq 2)$.

Покажем, что в n-арной группе n-арная подгруппа может быть одновременно и нормальной и инвариантной.

8. Пример. Пусть < S_n, [ ] > – тернарная группа, производная от симметрической группы S_n. Так как A_n нормальна в S_n, то < A_n, [ ] > инвариантна в < S_n, [ ] >. Так как

$$[xB_nB_n] = [B_nxB_n] = [B_nB_nx] = A_n,\ x \in A_n,$$

$$[xB_nB_n] = [B_nxB_n] = [B_nB_nx] = B_n,\ x \in B_n,$$

то тернарная группа $< B_n, [\ ] >$ всех нечетных подстановок также инвариантна в $< S_n, [\ ] >$. Если x и y – произвольные подстановки из S_n разной четности, то

$$[xyA_n] = [A_nyx] = B_n,\ [xyB_n] = [B_nyx] = A_n.$$

Если x и y имеют одинаковую четность, то

$$[xyA_n] = [Ayx] = A_n,\ [xyB_n] = [B_nyx] = B_n.$$

Таким образом,

$$[xyA_n] = [A_nyx],\ [xyB_n] = [B_nyx]$$

для любых $x, y \in S_n$, т.е. $< A_n, [\ ] >$ и $< B_n, [\ ] >$ нормальные в $< S_n, [\ ] >$ тернарные подгруппы.

Исчерпываются ли полуинвариантные n-арные подгруппы любой n-арной группы нормальными n-арными подгруппами и инвариантными n-арными подгруппами? Иначе говоря, может ли в n-арной группе быть полуинвариантная n-арная подгруппа, которая не является нормальной и не является инвариантной?

Положительный ответ на последний вопрос следует из следующего примера.

9. Пример. Пусть $< D_6, [\ ] >$ – тернарная группа, производная от диэдральной группы $D_6 = C_6 \cup B_6$, где $C_6 = \{e, c, c^2, c^3, c^4, c^5\}$ – циклическая подгруппа порядка 6, порожденная элементом c, $B_6 = \{b, bc, bc^2, bc^3, bc^4, bc^5\}$ – множество всех отражений правильного шестиугольника.

Если $B = \{b, bc^3\}$, то $< B, [\ ] >$ – тернарная подгруппа в $< D_6, [\ ] >$ (см. [3]).

Так как

$$[ccB] = c^2B = \{bc^4, bc\},\ [Bcc] = Bc^2 = \{bc^2, bc^5\},$$

то $[ccB] \neq [Bcc]$. Следовательно, $< B, [\ ] >$ не является нормальной в $< D_6, [\ ] >$.

Так как

$$[BBc] = BBc = \{c, c^4\},\ [BcB] = BcB = \{c^2, c^5\},$$

то $[BBc] \neq [BcB]$. Поэтому, $< B, [\ ] >$ не является инвариантной в $< D_6, [\ ] >$.

Так как

$$[cBB] = cBB = \{c, c^4\},$$

то $[BBc] = [cBB] = \{c, c^4\}$, откуда следует $[BBx] = [xBB]$ для любого $x \in C_6$.

Так как $< B_6, [\ ] >$ полуабелева [3], то в $< B_6, [\ ] >$ все тернарные подгруппы полуинвариантны. Поэтому $[BBx] = [xBB]$ для любого $x \in B_6$.

Таким образом, $< B, [\ ] >$ – полуинвариантная в $< D_6, [\ ] >$ тернарная подгруппа, которая не является нормальной в $< D_6, [\ ] >$ и не является инвариантной в $< D_6, [\ ] >$.

Если зафиксировать элементы $a_1,\ldots,a_{n-3} \in A$, то для любых $x_1,\ldots,x_{n-2} \in A$ существуют $y, z \in A$ такие, что все три последовательности

$$x_1 \ldots x_{n-2},\quad ya_1 \ldots a_{n-3},\quad a_1 \ldots a_{n-3}z$$

эквивалентны. Поэтому справедливо

10. Предложение. Если $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $< B, [\ ] >$ – нормальна в $< A, [\ ] >$;

2) $[xya_1\ldots a_{n-3}B] = [Bya_1\ldots a_{n-3}x]$ для любых $x,y \in A$ и некоторых $a_1,\ldots,a_{n-3} \in A$;

3) $[xa_1\ldots a_{n-3}zB] = [Ba_1\ldots a_{n-3}zx]$ для любых $x,z \in A$ и некоторых $a_1,\ldots,a_{n-3} \in A$.

Полагая $a_1 = \ldots = a_{n-3} = b \in B$, получим

11. Предложение. Если $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $< B, [\,] >$ – нормальна в $< A, [\,] >$;

2) $[xy\underbrace{b\ldots b}_{n-3}B] = [By\underbrace{b\ldots b}_{n-3}x]$ для любых $x, y \in A$ и некоторого $b \in B$;

3) $[x\underbrace{b\ldots b}_{n-3}zB] = [B\underbrace{b\ldots b}_{n-3}zx]$ для любых $x, z \in A$ и некоторого $b \in B$.

Так как

$$[xy\underbrace{b\ldots b}_{n-3}B] = [xy\underbrace{B\ldots B}_{n-2}],\ [B\underbrace{b\ldots b}_{n-3}zx] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-2}zx]$$

для любого $b \in B$, то из предложения 11 вытекает

12. Следствие. Если $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $< B, [\,] >$ – нормальна в $< A, [\,] >$;

2) $[xy\underbrace{B\ldots B}_{n-2}] = [By\underbrace{b\ldots b}_{n-3}x]$ для любых $x, y \in A$ некоторого $b \in B$;

3) $[x\underbrace{b\ldots b}_{n-3}zB] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-2}zx]$ для любых $x, z \in A$ и некоторого $b \in B$.

Используя определение 3, предложение 11 и следствие 12, получим

13. Предложение. Если $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $< B, [\,] >$ – нормальна в $< A, [\,] >$;

2) $[xx_1\ldots x_{n-2}By_1\ldots y_{n-1}] = B$ для любых $x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A$ и любой последовательности $y_1\ldots y_{n-1}$, обратной для $x_1\ldots x_{n-2}x$;

3) $[z_1\ldots z_{n-1}Bx_1\ldots x_{n-2}x] = B$ для любых $x_1, \ldots, x_{n-2}, x \in A$ и любой последовательности $z_1\ldots z_{n-1}$ обратной для $xx_1\ldots x_{n-2}$;

4) $[xy\underbrace{b\ldots b}_{n-3}B\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{b}b\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}] = B$ для любых $x,y \in A$ и некоторого $b \in B$;

5) $[\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\bar{b}b\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}B\underbrace{b\ldots b}_{n-3}zx] = B$ для любых $x,z \in A$ и некоторого $b \in B$;

6) $[xy\underbrace{B\ldots B}_{n-2}\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{b}b\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}] = B$ для любых $x,y \in A$ и некоторого $b \in B$;

7) $[\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\bar{b}b\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\underbrace{B\ldots B}_{n-2}zx] = B$ для любых $x,z \in A$ и некоторого $b \in B$.

Если $n = 3$, то имеет место

14. Предложение. Для тернарной подгруппы $< B, [\,] >$ тернарной группы $< A, [\,] >$ следующие утверждения эквивалентны:

1) $< B, [\,] >$ – нормальна в $< A, [\,] >$;

2) $[xyB\bar{x}\bar{y}] = B$ для любых $x, y \in A$;

3) $[\bar{z}\bar{x}Bzx] = B$ для любых $x, z \in A$.

15. Лемма. Если < B, [ ] > = <$\cap B_i$, [ ] > – непустое пересечение семейства {< B_i, [ ] > | i $\in$ I} нормальных n-арных подгрупп n-арной группы < A, [ ] >, то n-арная подгруппа < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >.

Доказательство. Так как все < B_i, [ ] > нормальны в < A, [ ] >, то согласно 2) и 3) предложения 13

$$[\alpha B_i\beta^{-1}] = B_i,\ [\alpha^{-1}B_i\beta] = B_i,$$

где $\alpha = xx_1\ldots x_{n-2}$, $\beta = x_1\ldots x_{n-2}x$, α^{-1} и β^{-1} – обратные последовательности для α и β соответственно. Тогда

$$[\alpha B\beta^{-1}] = [\alpha(\cap B_i)\beta^{-1}] \subseteq [\alpha B_i\,\beta^{-1}] = B_i,$$

$$[\alpha^{-1}B\beta] = [\alpha^{-1}(\cap B_i)\beta] \subseteq [\alpha^{-1}B_i\,\beta] = B_i,$$

откуда

$$[\alpha B\beta^{-1}] \subseteq \cap B_i = B,\ [\alpha^{-1}B\beta] \subseteq \cap B_i = B,$$

т.е.

$$[\alpha B\beta^{-1}] \subseteq B, \qquad (*)$$

$$[\alpha^{-1}B\beta] \subseteq B.$$

Из последнего включения следует $[\alpha[\alpha^{-1}B\beta]\beta^{-1}] \subseteq [\alpha B\beta^{-1}]$, откуда

$$B \subseteq [\alpha B\beta^{-1}]. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) следует $[\alpha B\beta^{-1}] = B$. Тогда согласно 2) предложения 13, < B, [ ] > нормальна в < A, [ ] >. Лемма доказана.

16. Лемма. Если < B, [ ] > – полуинвариантная, < C, [ ] > – нормальная n арные подгруппы n-арной группы < A, [ ] >, то

$$< D, [\ ] > = < [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}C], [\ ] >$$

– нормальная n-арная подгруппа в < A, [ ] >.

Доказательство. По следствию 5.20 [4] < D, [ ] > – полуинвариантная n-арная подгруппа в < A, [ ] >. Используя полуинвариантность < B, [ ] >, а также нормальность < C, [ ] >, получаем

$$[xx_1\ldots x_{n-2}D] = [xx_1\ldots x_{n-2}[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}C]] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}[xx_1\ldots x_{n-2}C]] =$$

$$= [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}[Cx_1\ldots x_{n-2}x]] = [[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}C]x_1\ldots x_{n-2}x] = [Dx_1\ldots x_{n-2}x],$$

т.е.

$$[xx_1\ldots x_{n-2}D] = [Dx_1\ldots x_{n-2}x].$$

Следовательно, < D, [ ] > – нормальна в < A, [ ] >. Лемма доказана.

Если < B, [ ] > и < C, [ ] > – n-арные подгруппы n-арной группы < A, [ ] >, то положим

$$< B, [\ ] > \wedge < C, [\ ] > = < B\cap C, [\ ] >,\ < B, [\ ] > \vee < C, [\ ] > = < D, [\ ] >,$$

где < D, [ ] > – пересечение всех n-арных подгрупп, содержащих < B, [ ] > и < C, [ ] >, т.е. < D, [ ] > – n-арная подгруппа, порожденная множеством $B\cup C$.

Ясно, что множество L(A, [ ]) всех n-арных подгрупп n-арной группы < A, [ ] >, дополненное пустым множеством, образует полную решетку относительно операций $\wedge$ и $\vee$.

17. Лемма. Пусть < B, [ ] > и < C, [ ] > – n-арные подгруппы n-арной группы < A, [ ] >, причем < B, [ ] > – полуинвариантна в < A, [ ] > и $B \cap C \neq \varnothing$. Тогда

$$<[\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C], [\,]>$$

– n-арная подгруппа, порожденная < B, [ ] > и < C, [ ] >.

Доказательство. Положим < D, [ ] > = < B, [ ] > ∨ < C, [ ] >.Так как в < B, [ ] > и в < C, [ ] > имеются нейтральные последовательности, то

$$C \subseteq [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C],\ B \subseteq [B \underbrace{C\ldots C}_{n-1}],$$

а так как, кроме того, $B \cap C \neq \varnothing$, то из второго включения, учитывая лемму 5.22[4], получаем

$$B \subseteq [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C],$$

откуда

$$B \cup C \subseteq [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C]. \qquad (***)$$

Так как < B, [ ] > – полуинвариантна в < A, [ ] >, то

$$[\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C] = [C \underbrace{B\ldots B}_{n-1}],$$

откуда и из леммы 5.19 [4] следует, что $<[\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C], [\,]>$ – n-арная подгруппа в < A, [ ] >.

Тогда из (***) вытекает $D \subseteq [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C]$. Включение $[\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C] \subseteq D$ является следствием теоремы 2.6 [4]. Таким образом, $D = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C]$. Лемма доказана.

18. Теорема. Множество всех нормальных n-арных подгрупп n-арной группы < A, [ ] >, содержащих фиксированный элемент, образуют подрешетку решетки L(A, [ ]).

Доказательство. Если < B, [ ] > и < C, [ ] > – нормальные n-арные подгруппы из < A, [ ] >, содержащие фиксированный элемент $a \in A$, то по лемме 15

$$< B, [\,] > \wedge < C, [\,] > = < B\cap C, [\,] >$$

– нормальная n-арная подгруппа в < A, [ ] >, причем $a \in B\cap C$.

Положим

$$< D, [\,] > = < B, [\,] > \vee < C, [\,] >.$$

Тогда по лемме 17

$$< D, [\,] > = <[\underbrace{B\ldots B}_{n-1} C], [\,]>,$$

а по лемме 16 < D, [ ] > – нормальная n-арная подгруппа в < A, [ ] >. Ясно, что $a \in D$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dorute W.*** Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. 1928. B.29. S.1-19.
2. ***Гальмак А.М.*** Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения // Вопр. алгебры. – 1990. – Вып.10. – С. 91-94.
3. ***Гальмак А.М., Воробьёв Г.Н.*** Тернарные группы отражений. – Мн.: Беларуская навука, 1998. – 128 с.

4. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. – Мн.: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

SUMMARY

In this paper the normal n-ary subgroups of n-ary groups are difined and studied.