УДК 372.851

А.Б. ЧЕБОТАРЕВСКИЙ

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ – ЦЕЛЬ И СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 4–5 КЛАССАХ

Решение текстовых задач является одним из основных видов учебной деятельности на уроках математики в 4-5 классах, так как при этом у школьников развиваются логическое мышление, элементарные навыки абстрагирования, математического моделирования и т. п. [1].

Общим для различных текстовых задач является то, что для решения проблемы из той или иной предметной области вначале строится некоторая математическая модель ситуации, эта модель изучается, преобразуется, исследуется, а интерпретация результатов исследования модели позволяет сформулировать ответ на поставленный содержательный вопрос. Способы решения задачи если чем и отличаются, так это средствами, использованными для построения модели и для её исследования [2].

При реализации перехода к 12-летнему обучению в математике 4–5 класса наиболее существенным является изменение роли текстовых задач.

До реформы математического образования 70-х годов текстовые задачи составляли значительную часть курса арифметики и решались «по действиям». Значительное внимание при этом уделялось отработке навыков решения задач определённых типов. К их числу относятся задачи на пропорциональные величины, проценты, движение, совместную работу и др.

Выработке же общих подходов к работе с текстовой задачей уделялось недостаточное внимание. Следствием этого явилось стремление учителей и учеников по условию задачи определить тот тип из разученных ранее, к которому эта задача относится. Если же задача не подходила ни под один из известных типов, то она представляла значительные трудности для решения.

Основным аргументом сторонников раннего использования уравнений для решения текстовых задач было то обстоятельство, что при овладении методом составления уравнений значительно упрощается процесс решения. Эта точка зрения в 70-е годы стала господствующей, алгебраический метод решения текстовых задач с помощью уравнений вводился уже в 3-м классе начальной школы. Это привело к ослаблению связи между арифметическими действиями и их содержательной интерпретацией, к еще большему формализму в обучении, чем до реформы 70-х годов.

Математика, утратив содержательную основу уже в начальных классах, постепенно превращалась в сухую, непонятную, оторванную от жизни дисциплину, которая требовала выполнения каких-то правил. Это впечатление от математики особенно усиливалось в старших классах в связи с введением элементов высшей математики, которые объективно не могли быть рассмотрены с достаточными математическими обоснованиями и раскрытием богатого содержания новых понятий. В практике обучения элементы математического анализа превратились в некоторый набор алгоритмов и формальных правил, которые нужно было заучить и научиться ими пользоваться.

Причиной, по которой обучение оказывалось неустойчивым к формализму, является, по-видимому, подмена цели: вместо обучения растущего и развивающегося ребенка на первый план было поставлено то или иное содержание, которому следовало этого ребенка обучить. Хотя и сам материал, и методы его изучения должны выбираться такими, чтобы они способствовали главной цели обучения – раскрытию и развитию потенциала ученика.

Именно поэтому программой в 4-5 классах 12-летней школы при изучении математики предполагается содержательное ее развертывание [3]. Новые понятия и идеи возникают при осмысливании определённых ситуаций реального окружения ребёнка, среды, в которой он живет. К их числу в первую очередь относятся представления о пропорциональности, которые ведут к дробям в математике и удельным величинам в физике.

Содержательные вопросы, которые являются на рассматриваемом этапе обучения основным стимулом расширения математических знаний ученика, служат также для тренировки его активности, стимулируют развитие. Текстовая задача, являясь определенной дидактической формой предъявления содержательной проблемы, выступает для ребёнка целью обучения, для учителя же она есть средство достижения цели обучения.

При работе с той или иной текстовой задачей учителю важно не только получить ответ на поставленный вопрос, но и дать учащимся представление о самой процедуре решения. Для этого на этапе ознакомления с процессом решения задачи учитель выбирает и ставит перед собой одну из следующих целей, достижение которых призвано расширить возможности учащихся.

- Познакомить с различными способами передачи проблемной ситуации (предметным, схематическим, графическим, словесным, смешанным).
- Познакомить с различными способами построения математической модели задачи.
- Познакомить с различными способами разбора задачи (от данных к неизвестному, от неизвестного к данным).
- Познакомить с различными приемами отыскания способов решения задачи.
- Обсудить различные способы решения задачи, реализующие различные связи между данными и искомым.
- Обсудить те общие принципы, которые можно перенести на подобные задачи; выявить возможные различия в задачах, к которым применим найденный способ.
- Составить и решить задачи, обратные данной.

Понятно, что с учащимися указанные процессуальные моменты обсуждаются на содержательном уровне, только в связи с решением той или иной конкретной задачи.

Проиллюстрируем сказанное на одной задаче.

В 11 часов утра из аэропорта одновременно в противоположных направлениях вылетели два самолета. В 14 часов расстояние между ними было 3540 км. Определите скорость одного самолета, если скорость второго 640 км/ч.

Работа над задачей начинается с осмысления ее условия, вычленения данных и искомых величин, установления связей между ними. Усвоению проблемной ситуации способствует постановка серии вопросов по условию.

– О чем говорится в задаче? (О движении двух самолетов).

– Что известно об этом движении? (Самолеты вылетели одновременно в противоположных направлениях).

– Известны ли скорости самолетов? (Скорость одного самолета 640 км/ч, а скорость второго требуется найти).

– Что известно о времени движения? (Самолеты вылетели в 11 часов утра, а следующий момент времени, о котором говорится в задаче, это 14 часов).

– Что известно о расстоянии между самолетами? (Самолеты вылетели из одного аэропорта, и в 14 часов расстояние между ними было 3540 км).

Беседа по условию задачи обычно сопровождается построением графической, схематической интерпретации или краткой записью. В тех случаях, когда краткая запись оправдана, она должна проводиться с большой тщательностью. Недопустимо требовать выполнения краткой записи по образцу, шаблону, так как это уводит ученика от главного – выявления связей между элементами условия – на соблюдение некоторых формальных установок. Нельзя также, стремясь максимально сократить условие, забывать о здравом смысле. Тогда условие может превратиться в набор чисел и непонятных сокращений слов.

В некоторых случаях, если ситуация, описанная в задаче, учащимся незнакома, целесообразно начать с предметной интерпретации условия, причем это можно сделать и в игровой форме. В нашем случае, например, учитель – диспетчер аэропорта, а два вызванных ученика – пилоты самолетов. Диспетчер вначале согласовывает с пилотами их планы (кто куда будет лететь, во столько взлет), определяет одному скорость полета. В дальнейшем диспетчер будет проигрывать с пилотами те или иные ситуации, связанные с задачей. Такое проигрывание условий будет способствовать формированию отчетливого представления об определенной модельной задаче.

Графическая модель создается постепенно и может выглядеть, например, так, как на рисунке 1.

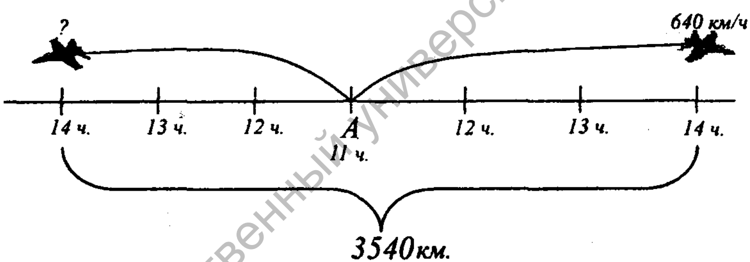

Рис. 1

Понятно, что создание хотя бы приблизительного рисунка требует определенных навыков в рисовании, значительных временных затрат и не всегда оказывает желательное эстетическое воздействие. Поэтому не следует требовать от учеников выполнения на уроке таких рисунков, их может сделать или предъявить готовыми сам учитель. С детьми же можно обсудить существенные моменты и, опустив несущественные, отразить их на схематическом рисунке. В результате получится рисунок, похожий на рисунок 2.

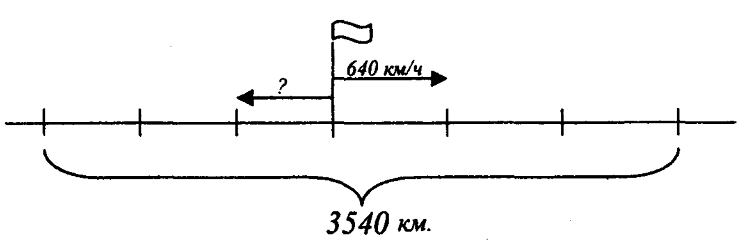

Рис. 2

На рисунке 2, как и при записи условия таблицей, условие задачи частично переформулировано: вместо времени взлета и момента в 14 ч используется продолжительность временного промежутка (3 ч). Такая переформулировка с целью представить условие в более удобном для восприятия, а следовательно, и для дальнейшего решения виде почти всегда сопровождает этап осмысления условия. Этим, по существу, делается первый шаг в решении.

Схематический рисунок по сравнению с применяющейся для краткой записи таблицей

	V	t	S
I	640 км/ч	Одинаково, 3 ч	3540 км
II	?	Одинаково, 3 ч	

вызывает больше ассоциаций, более нагляден. Важно, что при построении схематического рисунка у учеников развиваются навыки самостоятельной работы, происходит отвлечение от несущественных для решения задачи обстоятельств, подготавливается качественный скачок в сознании ученика от реального объекта к замещающему его символическому представителю. Использование для построения схематической интерпретации условия системы отрезков оказывается удобным еще и по той причине, что над отрезками-представителями можно реально выполнять действия в соответствии с условием (сравнивать, увеличивать, уменьшать). При этом следует помнить, что удачное отображение проблемной ситуации во многом подталкивает ученика на правильный путь решения.

Разбор задачи проводят либо от искомой величины к данным, либо от данных величин к искомой, либо сочетают эти способы. Нисходящий анализ начинается с вопроса задачи.

– Какой главный вопрос задачи? (Какова скорость второго самолета?)

– Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи? (Расстояние, которое пролетел второй самолет, и время полета.)

– Что из этого нам известно? (Ничего.)

– Что можно сразу определить по условию? (Время полета: 14 ч – 11 ч = 3 ч.)

– Как можно найти расстояние, которое пролетел второй самолет? (Из расстояния, на которое разлетелись самолеты, вычесть расстояние, которое пролетел первый самолет.)

– Что из этого известно? (Расстояние, на которое разлетелись самолеты.)

– Что нужно знать, чтобы найти расстояние, которое пролетел первый самолет? (Нужно знать его скорость и время полета.)

– Что из этого нам известно? (Все.)

Результатом проведенного анализа является схема, представленная на рисунке 3.

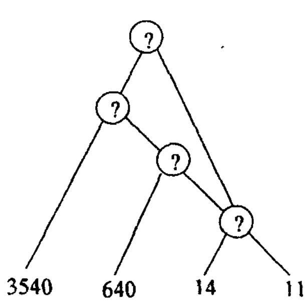

Рис. 3

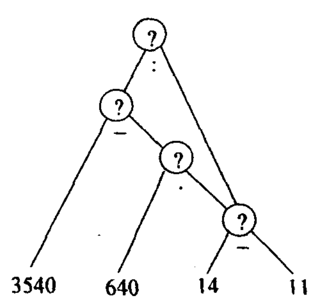

Рис. 4

На основе рисунка 3 можно получить вычислительную схему для нахождения ответа на вопрос задачи (рис. 4).

При восходящем анализе начинают от данных, условие задачи при этом подвергается непрерывной переработке.

– Что можно определить по условию? (Время, которое самолеты находились в полете: 14 ч – 11 ч = 3 ч.)

– Что теперь нам известно? (Два самолёта вылетели одновременно в противоположных направлениях, и через 3 часа расстояние между ними стало 3540 км. Известна и скорость одного самолёта – 640 км/ч.)

– Что из этого условия можно определить? (Сколько километров пролетел один самолёт: 640 км/ч·3 ч= 1920 км.)

– Как теперь выглядит условие? (Два самолета вылетели одновременно в противоположных направлениях и через 3 часа расстояние между ними стало 3540 км. Известно, что один самолёт пролетел 1920 км. Какова скорость второго самолёта?)

– Что из этого условия можно найти? (Сколько километров пролетел второй самолёт: 3540 км – 1920 км = 1620 км.)

– Что теперь известно о втором самолёте? (За 3 ч самолет пролетел 1620 км.)

– Можно ли теперь ответить на вопрос задачи? (Можно: 1620 км : 3 ч = 540 км/ч – скорость второго самолёта.)

После того, как ученики определили время полёта самолётов (3 ч), они могут предложить найти не расстояние, которое пролетел один самолёт, а расстояние, на которое удалялись самолёты за один час (3540 км : 3 ч = 1180 км.)

С учетом этого условие можно переформулировать в следующем виде. «Два самолёта вылетели одновременно в противоположных направлениях и за один час расстояние между ними увеличивалось на 1120 км. Скорость одного самолёта 640 км/ч. Нужно определить скорость другого самолета». В результате последовательной переформулировки условия задачи получили простую задачу, которая решается в одно действие. (1180 км/ч – 640 км/ч = 540 км/ч – скорость второго самолёта.)

Результаты проведенных здесь рассуждений можно отразить на схеме, представленной на рисунках 5 и 6.

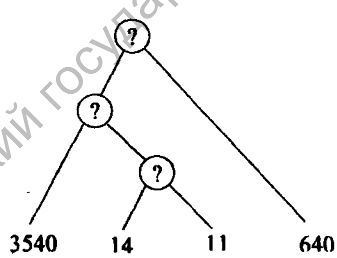

Рис. 5

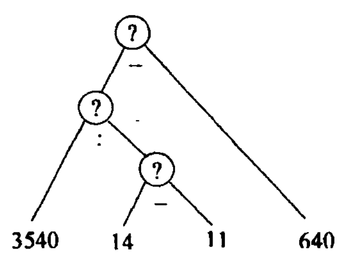

Рис. 6

Опыт показывает, что большинство учащихся в IV да и многие в V классах не могут проследить весь путь решения задачи от начала до конца, не используя вычисления. Именно поэтому целесообразно сопровождать анализ задачи построением соответствующей схемы (в нашем примере это рисунок 3, 5 или 6). Эта схема позволяет учащимся обозреть связи, которые имеются между данными и искомыми величинами и будут использованы для составления плана решения и при его реализации.

Глядя на схему 4, ученики проговаривают план решения задачи: «В первом действии узнаем время, которое летели самолёты, действием вычитания. Во втором действии – расстояние, которое пролетел первый самолёт, действием умножения. В третьем действии узнаем расстояние, которое пролетел второй самолёт, действием вычитания. В четвёртом действии узнаем скорость второго самолёта, действием деления». Этот же план решения получается и при использовании схемы 5.

Намеченный план решения нужно реализовать. В методической литературе описаны такие способы оформления решения: по действиям без пояснений, по действиям с пояснениями, в вопросной форме, составлением числового выражения.

Для рассматриваемой задачи записи при оформлении решения по действиям могут выглядеть следующим образом.

Решение:
1) 14 – 11 = 3 (ч);
2) 640 · 3 = 1920 (км);
3) 3540 – 1920 = 1620 (км);
4) 1620 : 3 = 540 (км/ч).
Ответ: 540 км/ч.

Понятно, что такое оформление решения – мера вынужденная, призванная зафиксировать опорные моменты решения в условиях, когда учащиеся еще не в полной мере овладели навыками письма с приемлемой скоростью. Поэтому отсутствие в записи смысловых пояснений нужно компенсировать устными разъяснениями учащихся, которые могут отличаться как степенью развернутости, так и формой (комментарий, объяснение, вопрос).

При оформлении решения по действиям с пояснениями «скелет» решения становится более осязаемым.

Решение:
1) 14 – 11 = 3 (ч) – время полета;
2) 640 · 3 = 1920 (км) – пролетел первый;
3) 3540 – 1920 = 1620 (км) – пролетел второй;
4) 1620 : 3 = 540 (км/ч) – скорость второго.
Ответ: 540 км/ч.

Понятно, что пояснения могут отличаться степенью развернутости. Например, при решении задачи другим способом пояснения могут выглядеть так.

Решение:
1) 14 ч – 11 ч = 3 ч – время полета самолетов;
2) 3540 км : 3 = 1180 км – на такое расстояние разлетались самолеты за 1 ч;
3) 1180 км/ч – 640 км/ч = 540 км/ч – скорость второго самолета.
Ответ: скорость второго самолета 540 км/ч.

Оформление решения задачи по вопросам подчеркивает диалогичность процесса решения, в то время как при оформлении решения по действиям с комментариями диалог присутствует неявно, во внутреннем плане.

Решение:
1) Какое время самолеты находились в полете?
   14 ч – 11 ч = 3 ч.
2) На какое расстояние разлетались самолеты за 1 ч?
   3540 км : 3 = 1180 км.
3) Какова скорость второго самопета?
   1180 км/ч – 640 км/ч = 540 км/ч.
Ответ: скорость второго самолета 540 км/ч.

Выбор между оформлением решения по действиям и по вопросам иногда определяется характером рассуждений, особенно неочевидными, искусственными преобразованиями условия задачи, которые делают один из этих способов оформления более естественным.

Оформление решения задачи в виде числового выражения в практике обучения используется довольно редко, в тех случаях, когда на первое место ставится цель составления выражения по некоторому его описанию, либо цель получить числовой ответ на вопрос задачи в знакомой ситуации. Для рассматриваемой нами задачи числовое выражение можно составить по вычислительной схеме, полученной в результате анализа условия задачи (рис. 4):

$(3540 - 640 \cdot (14 - 11)) : (14 - 11) = (3540 - 640 \cdot 3) : 3 = (3540 - 1920) : 3 = 1620 : 3 = 540.$

Видим, что вычисления, которые здесь проводились, соответствуют тем, которые выполнялись при решении задачи по действиям, что само по себе и неудивительно.

Важный этап – проверка правильности решения задачи. Проверка включает в себя проверку условия и результата на правдоподобие, (самолёт не может лететь со скоростью 25 км/ч), проверку по условию задачи. Например, для нашей задачи проверку можно провести с помощью составления и решения обратной задачи:

В 11 часов утра из аэропорта одновременно в противоположных направлениях вылетели два самолета. Скорость одного самолета 640 км/ч, скорость второго – 540 км/ч. определить расстояние между ними в 14 часов.

Решение:

1) 14 – 11 = 3 (ч)

2) 640 + 540 = 1180 (км/ч)

3) 1180·3 = 3540 (км)

Так как ответом на главный вопрос обратной задачи является число, которое есть среди данных прямой задачи задача решена правильно.

Творческая работа над задачей (Составить и решить задачи, обратные данной, проверить, как изменится решение, если поменять какой-нибудь элемент в условии, изменить начальные данные и т.д.). В нашей задаче данные, которые можно изменить – это, например, направление движения самолетов (в одну сторону, в противоположные стороны), скорости самолетов, расстояние, время полета и т. д.

Этап работы над текстовыми задачами с использованием схематических моделей является важным для освоения последующих математических формализмов и отвечает возрастным и психологическим особенностям детей 10-12 лет. Схематическая модель, с одной стороны, позволяет процесс решения задачи сделать почти реальным, представив его в виде последовательности состояний модели, с другой же стороны, от схематической модели легко сделать ещё один шаг до алгебраической модели. Для этого придется только формализовать содержание модели (отвлечься, оторваться от этого содержания): если рассуждения при работе со схематической моделью относятся к конкретным объектам, о которых говорится в задаче, то при работе с алгебраической моделью используются преобразования произвольных величин.

При обучении решению задач в 4-5 классах следует соблюсти меру между обучением решению задач определенных типов и выработкой обобщенных умений решения задач вообще. С одной стороны, важнее выработать общие подходы к решению текстовых задач, а с другой, эти обобщенные умения складываются через решение отдельных конкретных задач. При решении некоторых задач приходится проводить однотипные рассуждения, которые ассоциируются с определенным предметным содержанием. По этой причине в методической литературе закрепились названия *задачи «на движение», «на совместную работу», «на смеси и сплавы», «на части»* и др. (см., например, [4]). Поскольку при обучении в любом случае рассматриваются некоторые типы задач, то учителю приходится решать, в какой мере следует обучать решению задач тех или иных типов и как это должно происходить. В одном случае эти типы формирует учитель, а ученик должен их заучить (усвоить). При этом вопрос о выработке общей ориентировки для решения любой задачи может даже и не ставиться. Навыки решения отдельных типов задач в этом случае выступают как самостоятельные и не объединённые в систему. В другом же случае умение решать некоторые типы задач для ученика представляется полезным инструментом, которым иногда удобно пользоваться (см. [5]). В первом случае при обучении основным является принадлежность задачи к определённому типу (т.е. некоторое формальное обстоятельство), во втором же – структура связей между элементами задачи (т.е. содержательные характеристики).

При организации обучения важно выбрать тот путь, который в наибольшей степени обеспечивает достижение целей. В отношении обучения математике в IV-V классах это, в первую очередь, выбор системы работы с текстовыми задачами, ориентированной на формирование у учащихся общих подходов к решению любой задачи. Здесь, как показывает анализ пятидесятилетней практики обучения в советской школе, крайне важно соблюсти меру или соотношение между формальными, внешними и содержательными, личностными аспектами. Преувеличение роли формального, особенно на ранних этапах обучения, сужает наглядно-чувственную основу мышления, возможности использования интуиции, способствует свёртыванию мотивационной основы учения. Если же обучение строить только на содержательной основе, то это приведёт к существенному замедлению в развитии абстрактного мышления.

Поэтому при организации обучения математике в 4-5 классах от учителя требуется при использовании содержательных подходов заботиться о формировании определенных обобщённых действий, усвоении некоторых стандартных типов рассуждений [6], которые впоследствии можно будет использовать для введения и развертывания математических, в первую очередь алгебраических, формализмов.

Если арифметический метод занимает ведущее место в курсе математики 4-5 классов, то в 6 классе с большим вниманием нужно отнестись к использованию алгебраического метода. Он должен ненасильственно замещать арифметический, и использоваться в тех случаях, когда он оказывается проще арифметического. На различных задачах ученикам нужно показать преимущества и недостатки использования каждого из методов. Важно, чтобы учитель научил школьников отдавать предпочтение тому или иному методу решения (воспитать чувство метода).

Раннее введение алгебраического метода, как показал опыт, приводит к формализму: часто прочитав условие задачи, ученик, не задумываясь говорит: «За x возьмем...». При решении задач алгебраическим методом не происходит интенсивной отработки таких важных навыков, как расчленение проблемы на подзадачи, их частное решение внутри общей структуры, проведение поэтапных логически строгих рассуждений. А именно эти навыки, являясь не только общеучебными, но и общенаучными, в значительной степени определяют уровень общей культуры человека.

Арифметический метод не имеет отмеченных недостатков, однако требует больших временных затрат. Некоторые учителя, стараясь сэкономить время, делают акцент на вычислительном аспекте, приближая задачу по смыслу и по форме к вычислительному упражнению. Результатом такого формального подхода может стать утеря текстовой задачей своей основной функции – развивать у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать.

Курс математики 4-5 классов дает последнюю возможность реализовать огромный развивающий потенциал арифметического метода через массированное решение задач. В старших классах на первый план выйдет алгебраический способ, а арифметический будет применяться в основном при устном решении задач.

В результате решения задачи ученик получает некоторые данные, которые потом интерпретируются в соответствии с условием. Интерпретация результата также несет в себе скрытый смысл и имеет большое значение. Систематическая работа по анализу проведенного решения позволит привить учащимся первичные навыки проверки выполненной работы, обобщения, подведет их к восприятию частного случая как проявления общей закономерности.

Реализовать богатый развивающий потенциал текстовых задач в 4-5 классах возможно только при содержательной работе на каждом из этапов.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Радченко Е.В.*** Решение текстовых задач в 4-5 классах // Математика в школе. – 1987. – № 4. – С. 23-26.
2. ***Фридман Л.М.*** Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика.–М.: Школьная пресса, 2002. – 208 с.
3. Праграмы сярэдняй агульнаадукацыйнай школы. Матэматыка. 4-5 класы // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2001. – № 3. – С. 20-47.
4. ***Чекмарев Я.Ф., Снигирев В.Т.*** Методика преподавания арифметики.. – М.: Просвещение, 1968. – 357 с.
5. ***Александров И.И., Александров А.И.*** Методы решения арифметических задач. – М.: Учпедгиз, 1955. – 76 с.
6. ***Арнольд И.В.*** О задачах по арифметике // Математика в школе. – 1995. – № 5 – С. 2-7.

SUMMARY

The article deals with methods of teaching the 4th and 5th – form pupils to do textual sums, great importance for developing pupils' intelligence being attached to arithmetical methods of doing sums.