УДК 517.984

М.В.МАРТОН

ТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Данная работа посвящена нахождению тонкой структуры спектра оператора взвешенного сдвига в банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $\mathbf{B}(\mathbf{l}_1)$.

Рассмотрим ограниченный линейный оператор взвешенного сдвига T, задаваемый следующей формулой:

$$T(x_1,x_2,\ \ldots):=(0,a_1x_1,a_2x_2,\ldots),\ x=(x_k)\in \mathbf{l}_1, \tag{1}$$

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k\in\mathbf{C}$, $\sup\{|a_k| : k\in\mathbf{N}\}<\infty$.

Для описания спектра оператора взвешенного сдвига, а также подмножеств спектра, описываемых на алгебраическом языке элементов банаховой алгебры, воспользуемся тонкой структурой спектра, которая определяется с помощью состояний Тейлора-Халберга. Описание тонкой структуры спектра элементов банаховой алгебры было начато в работе Люмера [1]. В статье Гиндлера и Тейлора [2] вычислена тонкая структура спектра оператора взвешенного сдвига T в банаховом пространстве $\mathbf{l}_1$ в случае, когда последовательность весов a_k удовлетворяет условиям: $\inf\{|a_k|: k\in\mathbf{N}\}>0$ и $\sup\{|a_k|: k\in\mathbf{N}\}<+\infty$.

Будем говорить, что оператор T имеет *левый обратный*, который обозначим через T^{-1}, если из $Tx=0$ следует $x=0$, т.е. если T – взаимно однозначное отображение $\mathbf{l}_1$ на область значений R(T). Будем различать следующие возможности для R(T) и T^{-1}:

I. $R(T)=\mathbf{l}_1$; II. $R(T)\neq\mathbf{l}_1$, но $\overline{R(T)}=\mathbf{l}_1$; III. $\overline{R(T)}\neq\mathbf{l}_1$; и, соответственно, 1. $\exists\ T^{-1}$ и ограничен; 2. $\exists\ T^{-1}$ и неограничен; 3. T^{-1} не существует. Таким образом, каждый оператор попадает в один из девяти непересекающихся классов операторов, определяемых тремя возможностями для его области значений и его левого обратного. Состоянием оператора называются описанные классы, которые обозначаются с помощью римских и арабских чисел рассмотренной классификации. Например, если $T\in I$, т.е. $R(T)=\mathbf{l}_1$, и $T\in 3$, т.е. T^{-1} не существует, то мы объединяем это в виде записи $T\in I_3$ и т.д. В таблице состояний Тейлора-Халберга, см. подробности, например, в книге [3], по существу собраны теоремы, показывающие, в общем случае, какие состояния для оператора и его сопряженного возможны при некоторых ограничениях на пространство, а какие нет. Для описания тонкой структуры спектра ограниченного линейного оператора из $\mathbf{B}(\mathbf{l}_1)$ воспользуемся свойствами "состояния оператора $T-\lambda I$". Для этого введем, связанные с состояниями оператора, спектральные подмножества, например, $II_3(T)$, по определению, означает $II_3(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}: T-\lambda I\in II_3\}$ и т.д.

В общем случае спектр оператора, действующего в банаховом пространстве, содержит объединение следующих шести спектральных подмножеств, т.е. $\sigma(T)=I_3(T)\cup II_3(T)\cup III_3(T)\cup II_2(T)\cup III_1(T)\cup III_2(T)$. Заметим, что резольвентное множество оператора T можно записать в виде $\rho(T)=I_1(T)$. Рассмотрим общие свойства тонкой структуры спектра для ограниченного оператора взвешенного сдвига T, сформулированные в следующих леммах.

Л е м м а 1. *Для оператора взвешенного сдвига* T *из банаховой алгебры* $\mathbf{B}(\mathbf{l}_1)$ *спектральные множества* $I_3(T)=II_3(T)=\varnothing$, *а спектральное множество* $III_3(T)$ *может быть пустым, т.е.* $III_3(T)=\varnothing$, *или состоит из одной точки, т.е.* $III_3(T)=\{0\}$.

Доказательство: Если $I\in I_3(T)$ или $I\in II_3(T)$, тогда $Ker(T-\lambda I)\neq\{0\}$. Действительно пусть $\lambda\neq0$ и $(T-\lambda I)x=0$, тогда $0-\lambda x_1=0$, $ax_1-\lambda x_2=0,\ldots$, отсюда находим, что $x=(0,0,\ldots)=0$. Пусть $\lambda=0$, тогда $(T-\lambda I)x=Tx=(0,a_1x_1,a_2x_2,\ldots)$ и очевидно, что $\overline{R(T-\lambda I)}\neq\mathbf{l}_1$, таким образом $I_3(T)=II_3(T)=\varnothing$. В частности, $\{0\}\subset III(T)$ и, более того, можно показать, что $III_3(T)=\{0\}$, следовательно множество $III_3(T)$ может быть пустым или состоять из нуля.

Л е м м а 2. *В зависимости от свойств последовательности весов оператора взвешенного сдвига* T, *справедливы следующие утверждения:*

1.*Если существует вес* a_k *равный нулю, т.е.* $\exists\ a_k=0$, *тогда* $0\in III_3(T)$.

2.*Если* $\forall\ k\geq1$, $a_k\neq0$, $\inf|a_k|=0$, *тогда* $0\in III_2(T)$.

3.*Если* $\forall\ k\geq1$, $a_k\neq0$, $\inf|a_k|>0$, *тогда* $0\in III_1(T)$.

Доказательство: Пусть $\exists$ номер k такой, что $a_k=0$. Рассмотрим вектор $x'=(0,\dots 0,1,0,\dots 0)$, где "1" стоит на k-ом месте, тогда $Tx'=0$ и $x' \in \mathrm{Ker}T$. Следовательно $0 \in З(T)$ и, в силу леммы 1, $0 \in III_3(T)$. Таким образом первое утверждение доказано. Проверим теперь справедливость оставшихся утверждений. Пусть $\forall$ $k \geq 1$ $a_k \neq 0$ и для оператора T существует обратный на R(T). Воспользуемся равенством: $1/(\|T^{-1}\|)=\inf\limits_{x\neq 0}(\|Tx\|/\|x\|)=\inf\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=\inf|a_k|$. Если $\inf|a_k|=0$, тогда T^{-1} неограничен и, в силу доказательства леммы 1, $0 \in III_2(T)$, а если $\inf|a_k|>0$, тогда T^{-1} ограничен и $0 \in III_1(T)$.

Л е м м а 3. *Пусть у оператора взвешенного сдвига* T *бесконечное число весов* a_k *равно нулю, тогда если* $\lambda \neq 0$, то $\lambda \in I(T) \cup II(T)$ *и, кроме того, множества* $III_1(T)$ и $III_2(T)$ пустые.

Доказательство: Рассмотрим равенство $(T'-\lambda I)x=0$, где T': $l\infty \to l\infty$ – сопряженный оператор к оператору T. Так как $T'x=(a_1x_2,a_2x_3,a_3x_4,\dots)$, то $(T'-\lambda I)x=(a_1x_2-\lambda x_1,a_2x_3-\lambda x_2,\dots)=0$. Пусть $\exists$ номер k: $a_k=0$, тогда из равенства $a_kx_{k+1}-\lambda x_k=0$ следует $x_k=0$, из равенства $a_{k-1}x_k-\lambda x_{k-1}=0$ следует $x_{k-1}=0$ и т.д. Таким образом $x_i=0$ для $1 \leq i \leq k$. При бесконечном числе нулевых весов получаем $x=0$, т.е. $\mathrm{Ker}(T'-\lambda I)=\{0\}$, а это условие равносильно тому, что $\overline{R(T-\lambda I)}=\mathbf{l}_1$. Следовательно $\lambda \in I(T) \cup II(T)$. Поскольку точка $\lambda=0$ в рассматриваемом случае принадлежит Ker(T), то в силу предыдущего имеем, что $III_1(T)=III_2(T)=\varnothing$.

Так как операторы из банахова пространства $\mathbf{B(l_1)}$ можно рассматривать как элементы банаховой алгебры $\mathbf{B(l_1)}$, то на них можно перенести алгебраические понятия левого (правого) делителя нуля и левого (правого) топологического делителя нуля. Оператор $T \in \mathbf{B(l_1)}$ называется левым (правым) делителем нуля, если найдется оператор $A \in \mathbf{B(l_1)}$, $A \neq 0$, такой, что $TA=0$ $(AT=0)$. Множество всех левых (правых) делителей нуля обозначается через D_l (D_r). Оператор $T \in \mathbf{B(l_1)}$ *называется левым (правым) топологическим делителем нуля*, если найдется последовательность операторов $A_n \in \mathbf{B(l_1)}$, такая, что $\|A_n\|=1$ и $TA_n \to 0$ $(A_nT \to 0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\|TA_n\|=0$ $(\lim\limits_{x\to 0}\|A_nT\|=0)$. Множество всех левых (правых) топологических делителей нуля будем обозначать через Z_l (Z_r).

С помощью этих понятий можно определить точечный спектр $\sigma_p(T)=\{\lambda \in C\colon T-\lambda I \in D_l\}$, дефектный спектр $\sigma_d(T)=\{\lambda \in C\colon T-\lambda I \in D_r\}$, аппроксимативно точечный $\sigma_{ap}(T)=\{\lambda \in C\colon T-\lambda I \in Z_l\}$ и аппроксимативно дефектный $\sigma_{ad}(T)=\{\lambda \in C\colon T-\lambda I \in Z_r\}$. Заметим, что для оператора T на банаховом пространстве $\mathbf{l_1}$ эти спектры определяются следующим образом: $\sigma_p(T)=\{\lambda \in C\colon \mathrm{Ker}(T-\lambda I) \neq \{0\}\}$, $\sigma_d(T)=\{\lambda \in C\colon \overline{R(T-\lambda I)} \neq \mathbf{l_1}\}$, $\sigma_{ap}(T)=\{\lambda \in C\colon$ существует последовательность $(x_n) \subset \mathbf{l_1}$, такая, что $\|x_n\|=1$ и $\lim\|(T-\lambda I)x_n\|=0$ $\}$, $\sigma_{ad}(T)=\{\lambda \in C\colon R(T-\lambda I) \neq \mathbf{l_1}\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* T *– ограниченный оператор взвешенного сдвига из B(l1), тогда точечный, дефектный, аппроксимативно точечный, аппроксимативно дефектный спектр можно представить в виде:*

$$\sigma_p(T)=III_3(T),\ \sigma_d(T)=III_1(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T),\ \sigma_{ap}(T)=II_2(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T),$$
$$\sigma_{ad}(T)=II_2(T)\cup III_1(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T).$$

Доказательство: Эти утверждения следуют из теоремы 3.5 [3], а также из рассмотренных выше леммм 1-3 для оператора взвешенного сдвига T.

С помощью тонкой структуры спектра оператора взвешенного сдвига и теоремы 1 можно получить формулы для спектров $\sigma_p(T)$, $\sigma_d(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{ad}(T)$ оператора взвешенного сдвига T в зависимости от условий, накладываемых на веса a_k. Так, например, если $\exists$ $a_k=0$ и число нулевых весов конечно, тогда справедливы следующие представления:

$$\sigma_p(T)=\{0\},\ \sigma_{ap}(T)=\{0\}\cup\{\lambda\in C:\ r_2\le|\lambda|\le r_\sigma\},$$
$$\sigma_d(T)=\{\lambda\in C:\ 0\le|\lambda|\le r_1\},\ \sigma_{ad}(T)=\{\lambda\in C:\ |\lambda|\le r_\sigma\},\ \text{где}$$

$$r_1=\lim_{k\to\infty}\big(\inf_{k\ge j+2}|a_{j+1}\ldots a_{k-1}|^{1/k}\big),\ r_2=\mathrm{sap}_{k\ge1}\big(\inf_{m\ge j+2}|a_m\ldots a_{m+k-1}|\big)^{1/k},\ r_\sigma=\lim_{k\to\infty}\big(\sup_{m\ge1}|a_m\ldots a_{m+k-1}|\big)^{1/k},\qquad (2)$$

для $j=\max\{k\ge1:\ a_k=0\}$.

Для исследования тонкой структуры спектра оператора взвешенного сдвига T и его точечного, дефектного, аппроксимативно точечного и аппроксимативно дефектного, а также различных существенных спектров, целесообразно рассмотреть следующую классификацию операторов T, в зависимости от последовательности весов a_k:

a) $\forall$ k, $a_k\ne0$ и $\inf|a_k|>0$ ($\Leftrightarrow$ $0\in III_1(T)$ и $III_1(T)\ne\varnothing$);

b) $\forall$ k, $a_k\ne0$ и $\inf|a_k|=0$ ($\Leftrightarrow$ $0\in III_2(T)$ и $III_1(T)=\varnothing$);

c) $\exists$ $a_k=0$, число нулей среди весов a_k конечно;

d) $\exists$ $a_k=0$, число нулей среди весов a_k бесконечно.

Для ограниченного линейного оператора $T-\lambda I$ из $\mathbf{B}(\mathbf{l}_1)$ существенные спектры определяются как дополнение в комплексной плоскости **C** множеств, задаваемых фредгольмовыми свойствами оператора $T-\lambda I$:

$\sigma_{ef}(T):=\mathbf{C}\setminus\Phi(T)$ – *существенный спектр Фредгольма*;

$\sigma_{ew}(T):=\mathbf{C}\setminus\Phi_0(T)$ – *существенный спектр Вейля*;

$\sigma_{eb}(T):=\mathbf{C}\setminus B(T)$ – *существенный спектр Браудера*,

где $\Phi(T):=\{\lambda\in C:\ \overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I),\ nul(T-\lambda I)<\infty,\ def(T-\lambda I)<\infty\}$, $\Phi_0(T):=\{\lambda\in\Phi(T):\ ind(T-\lambda I)=0\}$, $B(T):=\{\lambda\in\Phi_0(T)$: проколотая окрестность точки λ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)\}$. По поводу этих обозначений и свойств, описанных множеств, смотри, например, книгу [3]. Напомним, что $nul(T):=\dim Ker(T)$, $def(T):=\dim l_1/R(T)$, $ind(T):=nul(T)-def(T)$.

Л е м м а 4. *Для оператора взвешенного сдвига* T *справедливы равенство и включение*:

1. $\{\lambda\in\mathbf{C},\ \lambda\ne0:\ \overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)\}=I_1(T)\cup III_1(T)$.
2. $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T)$.

Доказательство. Заметим, что $\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)$, когда $\lambda\notin Ker(T-\lambda I)$, тогда и только тогда, когда левый обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ к оператору $T-\lambda I$ существует и непрерывный, т.е. $\{\lambda\in C:\ =R(T-\lambda I),\ Ker(T-\lambda I)=\{0\}\}=1(T)$, следовательно $\{\lambda\in C:\ \overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I),\ Ker(T-\lambda I)=\{0\}\}=I_1(T)\cup III_1(T)$. Пусть $\lambda=0$. Если веса удовлетворяют условию d), т.е. бесконечное число нулевых весов a_k, тогда у уравнения $Tx=0$ есть бесконечное число линейно независимых ненулевых решений, т.е., в силу леммы 1, $III_3(T)=\{0\}$. Если веса удовлетворяют условию c), т.е. существует конечное число нулевых весов a_k, тогда у уравнения $Tx=0$ найдется конечное число линейно независимых ненулевых решений, и опять $III_3(T)=\{0\}$. Если среди весов a_k нет нулевых, т.е. веса удовлетворяют условиям a), b), тогда у уравнения $Tx=0$ существует единственное нулевое решение, т.е. $x=0$ и $III_3(T)=\varnothing$. Заметим, что в случаях a) и b), если $\overline{R(T)}=R(T)$, то тогда, в силу сказанного выше, $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)$. Таким образом, учитывая утверждение 2 леммы 2, получаем включение $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T)$.

Л е м м а 5. *Для области фредгольмовости оператора взвешенного сдвига T справедливы следующие утверждения:*

1. *Если веса удовлетворяют условиям* b), d), то $\Phi(T)=I_1(T)$.
2. *Если веса удовлетворяют условию* a), то $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)$.
3. *Если веса удовлетворяют условию* c) *и* $\inf\{|a_n|>0:\ n\ge k+1\}$, то $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_3(T)$, а если $\inf\{|a_n|=0:\ n\ge k+1\}=0$, то $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)$.

Доказательство: Первоначально опишем множество $\{\lambda\in C: = R(T-\lambda I), nul(T-\lambda I)<\infty\}$. Пусть $\lambda\neq 0$, тогда $Ker(T-\lambda I)=\{0\}$, смотри доказательство леммы 1, следовательно $nul(T-\lambda I)=0$ и, в силу леммы 4, $\{\lambda\in \mathbf{C},\ \lambda\neq 0: \overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I), nul(T-\lambda I)<\infty\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)$. Пусть $\lambda=0$. Если веса удовлетворяют условию b), тогда по утверждению 2 леммы 2, $\{0\}\in III_2(T)$, а так как у оператора T, находящегося в состоянии 2(T), область значений не замкнута, то $\{0\}\notin\Phi(T)$. Если веса удовлетворяют условию d), тогда $nul(T)=\infty$ и следовательно $\{0\}\notin\Phi(T)$. Если веса удовлетворяют условию a), тогда, в силу утверждения 3 леммы 2, $\{0\}\in III_1(T)$ и, в силу леммы 4, $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_2(T)\cup III_3(T)$. Так как $nul(T)=0$ и $\overline{R(T)}=R(T)$, то $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию c), тогда $\{0\}\subset III_3(T)$ и, кроме того, $nul(T)<\infty$. В этом случае T есть ортогональная сумма оператора взвешенного сдвига T* – оператор с весами a_n, где $n=k+1,\dots$, и a_k последний нулевой вес, и квазинильпотентного оператора N, $T=T^*\oplus N$. Так как у оператора N область значений замкнута, то если $\inf|a_n|>0$, тогда, согласно вышесказанному для весов, удовлетворяющих условию a), область значений оператора T* замкнута и $\overline{R(T)}=R(T)$, следовательно $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_3(T)$, а если $\inf|a_n|=0$, тогда область значений у оператора T* не замкнута, и $\{0\}\notin\Phi(T)$.

Опишем множество $\{\lambda\in \mathbf{C}: \overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I), def(T-\lambda I)<\infty\}$. Пусть $\lambda\neq 0$. Если веса удовлетворяют условию c), тогда чтобы $\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)$ необходимо и достаточно, в силу утверждения 1 леммы 4, чтобы либо $\lambda\in III_1(T)$ либо $\lambda\in I_1(T)$. Для этого случая $nul(T'-\lambda I)<\infty$ и, в силу замечания 2.4 книги [3] для $\lambda\in I_1(T)\cup III_1(T)$, получаем $def(T-\lambda I)=nul(T'-\lambda I)<\infty$. Таким образом $\{\lambda\in I_1(T)\cup III_1(T), \lambda\neq 0\}\subset\Phi(T)$. Если веса удовлетворяют условию d), то так как по лемме 3 $III_1(T)=\varnothing$, тогда $\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)$ тогда и только тогда, в силу леммы 4, когда $\lambda\in I_1(T)$. В этом случае $def(T-\lambda I)=0$. Таким образом, с учетом полученного выше, имеем $\Phi(T)=I_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию a), тогда $\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)$ тогда и только тогда, когда либо $\lambda\in III_1(T)$, и для этого случая $nul(T'-\lambda I)=1$ и, следовательно, $def(T-\lambda I)=1$ либо $\lambda\in I_1(T)$ и тогда $def(T-\lambda I)=0$. Таким образом, в силу доказательства леммы 4, $\{\lambda\in I_1(T)\cup III_1(T), \lambda\neq 0\}\subset\Phi(T)$. Если веса удовлетворяют условию b), то так как $III_1(T)=\varnothing$, тогда $\overline{R(T-\lambda I)}=R(T-\lambda I)$ тогда и только тогда, когда $\lambda\in I_1(T)$. В этом случае $def(T-\lambda I)=0$ и, таким образом, с учетом полученного выше, имеем $\Phi(T)=I_1(T)$.

Пусть $\lambda=0$. Если веса удовлетворяют условию a), тогда $nul(T')=1$ и $\{0\}\in III_1(T)$. Уравнение $Tx=y$ разрешимо для любой правой части, и следовательно, $\overline{R(T)}=R(T)$. Таким образом $def(T)=nul(T')=1$ и $\{0\}\subset I_1(T)\cup III_1(T)\subset\Phi(T)$, следовательно $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию c), тогда $nul(T')<\infty$ и $\{0\}\in III_3(T)$, а если $\inf|a_n|>0$,то в силу сказанного выше, в этом случае $\overline{R(T)}=R(T)$ и, следовательно, $def(T)=nul(T')<\infty$ и $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)\cup III_3(T)$, но если $\inf|a_n|=0$, то $\{0\}\notin\Phi(T)$, а $\Phi(T)=I_1(T)\cup III_1(T)$.

Л е м м а 6. *Для области фредгольмовости нулевого индекса и подмножества* B(T) *оператора взвешенного сдвига* T *справедливо равенство*:

$$\Phi_0(T)=B(T)=I_1(T).$$

Доказательство: Пусть веса удовлетворяют условию d) и $\lambda\neq 0$, тогда $nul(T-\lambda I)=0$ и для $\lambda\in I_1(T)$ $def(T-\lambda I)=0$, следовательно $ind(T-\lambda I)=0$. Если $\lambda=0$, то $\{0\}\notin\Phi(T)$, таким образом $\Phi_0(T)=I_1(T)$. Так как $I_1(T)$ – открытое множество, то $\exists$ окрестность, а значит и проколотая окрестность, содержащаяся целиком в $\rho(T)$, следовательно $B(T)=I_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию a), тогда $\forall\lambda$ $nul(T-\lambda I)=0$ и, в силу доказательства леммы 5, для $\lambda\in III_1(T)$ $def(T-\lambda I)=1$ и тогда $ind(T-\lambda I)\neq 0$, а для $\lambda\in I_1(T)$ $def(T-\lambda I)=0$ и $ind(T-\lambda I)=0$. Таким образом $\Phi_0(T)=I_1(T)$ и, согласно сказанному выше, $B(T)=I_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию b) и $\lambda\neq 0$, тогда $nul(T-\lambda I)=0$ и для $\lambda\in I_1(T)$ $def(T-\lambda I)=0$, следовательно $ind(T-\lambda I)=0$. Так как $\{0\}\notin\Phi(T)$, то $\Phi_0(T)=I_1(T)$ и опять, согласно сказанному выше, $B(T)=I_1(T)$. Если веса удовлетворяют условию c), и $\lambda \neq 0$, тогда nul(T−λI)=0 и, согласно доказательству леммы 5, для $\lambda \in I_1(T)$ def(T−λI)=0 и ind(T−λI)=0. Если $\lambda=0$, тогда из доказательства леммы 5 следует, что ind(T−λI)≠0. Таким образом $\Phi_0(T)=I_1(T)$, и согласно сказанному выше, опять $B(T)=I_1(T)$.

На основе лемм 4-6 и определений существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера, можно сформулировать теорему о связи существенных спектров с тонкой структурой при различных условиях на веса a_k.

Теорема 2. *Пусть* T – *ограниченный оператор взвешенного сдвига из* $\mathbf{B(l_1)}$. *Тогда для существенных спектров оператора* T *справедливы следующие равенства в терминах спектральных подмножеств:*

1. *Если веса удовлетворяют условию* d), *то* $\sigma_{ef}(T)=II_2(T) \cup III_3(T)$, *если веса удовлетворяют условиям* a), b) и c) *при* $\inf\{|a_n|>0: n \geq k+1\}>0$, то $\sigma_{ef}(T)=II_2(T) \cup III_2(T)$, *если веса удовлетворяют условию* c) *при* $\inf\{|a_n|=0: n \geq k+1\}=0$, то $\sigma_{ef}(T)=II_2(T) \cup III_2(T) \cup III_3(T)$.
2. *Если веса удовлетворяют условию* d), *то* $\sigma_{ew}(T)=\sigma_{eb}(T)=II_2(T) \cup III_3(T)$, *если веса удовлетворяют условию* b), *то* $\sigma_{ew}(T)=\sigma_{eb}(T)=II_2(T) \cup III_2(T)$, *если веса удовлетворяют условию* a), *то* $\sigma_{ew}(T)=\sigma_{eb}(T)=II_2(T) \cup III_1(T) \cup III_2(T)$, *если веса удовлетворяют условию* c), *то* $\sigma_{ew}(T)=\sigma_{eb}(T)=II_2(T) \cup III_1(T) \cup III_2(T) \cup III_3(T)$.

Доказательство: Эти утверждения следуют из лемм 4-6 и того факта, что для оператора T спектр $\sigma(T)$ имеет представление: $\sigma(T)=II_2(T) \cup III_1(T) \cup III_2(T) \cup III_3(T)$.

С помощью тонкой структуры спектра оператора взвешенного сдвига T и теоремы 3 можно получить формулы для существенных спектров оператора T из $\mathbf{B(l_1)}$ в зависимости от условий, накладываемых на веса a_k. Так, например, если веса удовлетворяют условию a), то тогда $\sigma_{ef}(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}=\sigma(T)$, $\sigma_{ew}(T)=\sigma_{eb}(T)=\sigma(T)$, где r_2 и r_σ определяются по формулам (2).

Существенные спектры для различных линейных ограниченных операторов в банаховых пространствах последовательностей $\mathbf{l_p}$, $1 \leq p \leq \infty$, подсчитаны в работах [4, 5]. В заключении отметим работу Гиндлера и Эйсена [6], в которой обобщены некоторые утверждения о связи делителей, топологических делителей нуля с состояниями оператора, а также работу Кужеля [7], в которой с помощью делителей нуля описаны точечный, непрерывный и остаточный спектр ограниченного линейного оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Lumer G.*** Fine structure and continuity of spectra in banach algebras // Anais de Acad. Bras. Cienc. – 1954. – V. 26. – № 2. – P. 229-233.
2. ***Gindler H.A., Taylor A.E.*** The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory // Stydia Math. – 1962. – V. 22. – P. 35-41.
3. ***Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.*** Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. – Мн.: БГУ, 2000. – 133 с.
4. ***Еровенко В.А., Иванов Ю.Г.*** Существенные спектры степеней оператора Чезаро в банаховых пространствах последовательностей // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44. – №4. – С. 9-13.
5. ***Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.*** Существенные спектры операторов взвешенного среднего в банаховых пространствах l_p // Вестник БГУ. Сер.1. – 2001. – №1. – С. 48-51.
6. ***Eisen M., Gindler H.*** Some banach algebra concepts, states of operators and approximate spectra // Indian J. Pure appl. Math. – 1980. – V.11. – №5. – P. 572-575.
7. ***Кужель А.В.*** Классификация спектра в алгебрах // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1983. – №10. – С.11-14.

SUMMARY

The paper deals with the research of the fine structure of the weighted translation operator in Banach algebra $\boldsymbol{B(l_1)}$. *Four cases for this operator being considered, some theorems in Banach algebra are obtained, which can be used for investigating the essential spectrum of weighted translation operator in* $\boldsymbol{B(l_1)}$.