УДК 517. 925. 52

Л.А. ДАНИЛОВИЧ

К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЯПУНОВА

Теории периодических решений дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Достаточно полную информацию о периодических решениях дифференциальных уравнений дают конструктивные методы (см., например, [1-4]).

Данная работа является продолжением [5]. На основе подхода [3, гл.2] исследуется задача о периодических решениях периода ω дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X\left(K_0 + \lambda^2 K_1(t)\right) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $K_1(t)$, $F(t)$ – непрерывные ω-периодические (n×n)-матрицы, K_0 – постоянная матрица, λ – вещественный скалярный параметр. Получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности и разработан эффективный алгоритм построения ω-периодического решения уравнения (1) в одном вырожденном случае, а именно в случае, когда

$$B(\omega) = 0, \tag{2}$$

где

$$B(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau.$$

Примем следующие обозначения:

$$P(\tau) = B(\tau)A(\tau), \quad \widetilde{P}(\omega) = \int_0^\omega P(\tau)\,d\tau, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \gamma = \|P^{-1}(\omega)\|,$$

$$\beta_0 = \|K_0\|, \quad \beta_1 = \max_t \|K_1(t)\|, \quad r = \|K_0^{-1}\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\alpha^3\beta_0\omega^3 + \gamma\alpha\beta_1 r^2\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\beta_1 r\omega^2, \quad q_3 = \frac{1}{3}\gamma\alpha^3\beta_1\omega^3,$$

$$q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|.\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [6, с. 21].

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие (2), а также условия*

$$\det K_0 \neq 0, \tag{3}$$

$$\det \widetilde{P} \neq 0, \tag{4}$$

$$0 < q(\varepsilon) < 1. \tag{5}$$

Тогда ω-периодическое решение уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде

$$X(t,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}X_{-2}+\frac{1}{\lambda}X_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t), \tag{6}$$

где ω-периодические матрицы $X_{i-2}(t)$, $i=0,1,\dots$, определяются рекуррентным интегральным соотношением.

Доказательство. Согласно [6, с. 215] рассматриваемая задача эквивалентна ω-периодической краевой задаче для уравнения (1) с условием

$$X(0,\lambda)=X(\omega,\lambda). \tag{7}$$

Сначала получим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (7). Пусть $X=X(t,\lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) на основании (7) имеем

$$\int_0^{\omega}\left[\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda)\left(K_0+\lambda^2K_1(\tau)\right)+F(\tau)\right]d\tau=0. \tag{8}$$

Используя (3), получим из (8)

$$\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau=-\lambda^2\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)d\tau\,K_0^{-1}-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega}F(\tau)d\tau\,K_0^{-1}. \tag{9}$$

Далее воспользуемся следующей формулой:

$$\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau=B(\omega)X(\omega,\lambda)-\int_0^{\omega}B(\tau)\dot X(\tau,\lambda)d\tau,$$

где

$$\dot X(\tau,\lambda)=\frac{dX(\tau,\lambda)}{d\tau}.$$

Тогда из (9) с учетом (1)-(3) получим

$$\int_0^{\omega}P(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau=-\lambda^2\int_0^{\omega}P(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)d\tau\,K_0^{-1}+$$

$$+\lambda\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)d\tau\,K_0^{-2}+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\omega}F(\tau)d\tau\,K_0^{-2}-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega}B(\tau)F(\tau)d\tau\,K_0^{-1}. \tag{10}$$

Из (1) имеем

$$X(\tau,\lambda)=X(t,\lambda)-\int_{\tau}^{t}\left[\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda)\left(K_0+\lambda^2K_1(\sigma)\right)+F(\sigma)\right]d\sigma. \tag{11}$$

Используя (11), получим из (10)

$$X(t,\lambda)=\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}P(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}\Big[\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda)\big(K_0+\lambda^2K_1(\sigma)\big)+F(\sigma)\Big]\,d\sigma-$$

$$-\lambda^2\,\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}P(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}+\lambda\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2}+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}F(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2}-\frac{1}{\lambda}\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}B(\tau)F(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}. \qquad (12)$$

Матричное интегральное уравнение (12) эквивалентно задаче (1), (7).

Решение уравнения (12) будем искать в виде (6). Подставляя (6) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$X_{-2}=\widetilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}F(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2},$$

$$X_{-1}(t)=\widetilde{P}^{-1}(\omega)\left[\int_0^{\omega}P(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}A(\sigma)X_{-2}\,d\sigma\,K_0+\int_0^{\omega}A(\tau)X_{-2}K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\omega}B(\tau)F(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}\right],$$

$$X_0(t)=\widetilde{P}^{-1}(\omega)\left[\int_0^{\omega}P(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}A(\sigma)\big(X_{-1}(\sigma)K_0+F(\sigma)\big)d\sigma-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\omega}P(\tau)X_{-2}K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}+\int_0^{\omega}A(\tau)X_{-1}(\tau)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2}\right],$$

$$X_k(t)=\widetilde{P}^{-1}(\omega)\left[\int_0^{\omega}P(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}A(\sigma)\big(X_{k-1}(\sigma)K_0+X_{k-3}(\sigma)K_1(\sigma)\big)d\sigma-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\omega}P(\tau)X_{k-2}(\tau)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}+\int_0^{\omega}A(\tau)X_{k-1}(\tau)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-2}\right],\quad k=1,2,\ldots. \qquad (13)$$

Докажем равномерную по $t\in\mathbf{R}$ сходимость ряда (6).

Поскольку $\|B(\tau)\|\le\alpha\tau$, то $\|P(\tau)\|\le\alpha^2\tau$.

Далее имеем оценку:

$$\int_0^{\omega}\|P(\tau)\||t-\tau|d\tau \le \int_0^{\omega}\alpha^2\tau|t-\tau|d\tau = \alpha^2\left(\int_0^t \tau(t-\tau)d\tau + \int_t^{\omega}\tau(\tau-t)d\tau\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{6}(2t^3 - 3\omega^2 t + 2\omega^3) \le \frac{1}{3}\alpha^2\omega^3.$$

Отсюда следует

$$\max_{0\le t\le\omega}\int_0^{\omega}\|P(\tau)\||t-\tau|d\tau \le \frac{1}{3}\alpha^2\omega^3.$$

Выполним оценки по норме в (13)

$$\|X_k(t)\| \le \left\|\widetilde{P}^{-1}(\omega)\right\|\left[\int_0^{\omega}\|P(\tau)\|\left|\int_{\tau}^{t}\|A(\sigma)\|\left(\|X_{k-1}(\sigma)\|\,\|K_0\| + \|X_{k-3}(\sigma)\|\,\|K_2(\sigma)\|\right)d\sigma\right|d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\omega}\|P(\tau)\|\|X_{k-2}(\tau)\|\|K_1(\tau)\|d\tau\right]\left\|K_0^{-1}\right\| + \int_0^{\omega}\|A(\tau)\|\,\|X_{k-1}(\tau)\|\,\|K_1(\tau)\|\,d\tau\left\|K_0^{-2}\right\| \le$$

$$= q_1\|X_{k-1}\|_C + q_2\|X_{k-2}\|_C + q_3\|X_{k-3}\|_C\,.$$

Откуда следует рекуррентная оценка

$$\|X_k\|_C \le q_1\|X_{k-1}\|_C + q_2\|X_{k-2}\|_C + q_3\|X_{k-3}\|_C, \quad k = 1,2,\dots. \qquad (14)$$

На основании оценки (14) с помощью приемов, используемых в [3], можно доказать, что ряд (6) сходится равномерно относительно $t \in \mathbf{R}$ в λ-области, определяемой условием (5). Тогда согласно [7, с. 160] сумма $X(t,\lambda)$ этого ряда представляет собой решение уравнения (12). Единственность решения $X = X(t,\lambda)$ нетрудно доказать методом от противного, используя условие (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.*** Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М., 1979.
2. ***Зубов В.И.*** Теория колебаний. – М., 1979.
3. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Мн., 1998.
4. ***Самойленко А.М., Ронто Н.И.*** Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев, 1976.
5. ***Данилович Л.А., Лаптинский В.Н.*** Об одном представлении периодического решения линейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 276-278.
6. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.
7. ***Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.*** Лекции по функциональному анализу. – М., 1954.

SUMMARY

The topical questions of the constructive theory of the periodic solutions of the Ljapunov's type matrix differential equation in singular case are investigated. Coefficient sufficient conditions of existence and uniqueness of the periodic solution are obtained. The effective algorithm of construction of this solution is developed.