УДК 517.925.52

В.А. ЛИВИНСКАЯ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛЯПУНОВА

Исследованию периодических решений систем дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. К настоящему времени разработано значительное количество разнообразных методов исследования этих решений.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Конструктивные методы (см., например, [1-4]) дают наиболее полную информацию о таких решениях, поскольку наряду с изучением вопроса существования периодических решений, содержат алгоритмы их построения.

Данная работа является продолжением [5]: на основе метода [3, гл.2] исследуется задача о периодических периода ω решениях дифференциального уравнения

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \lambda A(t)X + \lambda^2 XB(t) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t), B(t), F(t)$ – класса C ω-периодические ($n\times n$)-матрицы, λ – вещественный скалярный параметр.

Уравнение (1) заменим эквивалентной системой

$$\frac{dX}{dt} = Y, \tag{2}$$

$$\frac{dY}{dt} = \lambda A(t)X + \lambda^2 XB(t) + F(t). \tag{3}$$

Согласно [6, с. 215] задача об ω-периодических решениях системы (2), (3) эквивалентна периодической краевой задаче для (2), (3) с условиями

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{4}$$

$$Y(0,\lambda) = Y(\omega,\lambda). \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\ \alpha = \max_t\|A(t)\|,\ \beta = \max_t\|B(t)\|,\ \gamma = \|M^{-1}\|,$$

$$h = \max_t\|F(t)\|,\ \|H\|_C = \max_t\|H(t)\|,$$

$$q_1 = \tfrac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma\beta\omega,\ q_2 = \tfrac{1}{4}\gamma\alpha\beta\omega^3,\ \varepsilon = |\lambda|,\quad q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2,$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\alpha\omega,\ p_2 = \frac{1}{2}\beta\omega,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [6, с. 21], C – банахово пространство непрерывных (ω-периодических) ($n\times n$)-матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det M \neq 0$,

$$0 < \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 < 1. \tag{6}$$

Тогда ω-периодическое решение системы уравнений (1.2), (1.3) существует и единственно. Это решение представимо в виде

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k-1}X_{k-1}(t), \tag{7}$$

$$Y(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}Y_{k}(t), \tag{8}$$

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

где ω – периодические матрицы $X_{k-1}(t), Y_k(t)$, k=0,1..., определяются рекуррентными интегральными соотношениями

$$X_{-1} = -M^{-1}\int_0^{\omega} F(\tau)\,d\tau,$$

$$Y_0(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d\tau \int_{\tau}^{t} \left[A(\sigma)X_{-1} + F(\sigma)\right]d\sigma,$$

$$X_k(t) = M^{-1}\left[\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau \int_{\tau}^{t} Y_k(\sigma)d\sigma - \int_0^{\omega} X_{k-1}(\tau)B(\tau)\,d\tau\right],$$

$$Y_{k+1}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d\tau \int_{\tau}^{t} \left[A(\sigma)X_k(\sigma) + X_{k-1}(\sigma)B(\sigma)\right]d\sigma, \qquad (9)$$

k=0, 1, 2, ...

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (2) – (5). Пусть $X = X(t,\lambda), Y = Y(t,\lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (2), (4) имеем

$$\int_0^{\omega} Y(\tau,\lambda)d\tau = 0. \qquad (10)$$

Из (3) следует формула

$$Y(\tau,\lambda) = Y(t,\lambda) + \int_t^{\tau}\left[\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda^2 X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + F(\sigma)\right]d\sigma. \qquad (11)$$

Используя (11) получим из (10)

$$Y(t,\lambda) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d\tau \int_{\tau}^{t}\left[\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda^2 X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + F(\sigma)\right]d\sigma. \qquad (12)$$

Из (3), (5) имеем

$$\int_0^{\omega}\left[\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda) + \lambda^2 X(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau)\right]d\tau = 0$$

$$\int_0^{\omega} A(\tau)X(\tau,\lambda)\,d\tau = -\lambda\int_0^{\omega} X(\tau,\lambda)B(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega} F(\tau)\,d\tau. \qquad (13)$$

В (13) целесообразно воспользоваться формулой, аналогичной (11). Действительно, из (2) имеем соотношение

$$X(\tau,\lambda) = X(t,\lambda) + \int_t^{\tau} Y(\sigma,\lambda)\,d\sigma. \qquad (14)$$

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Тогда из (13) на основании (14) получим

$$MX(t,\lambda)=\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}Y(\sigma,\lambda)\,d\sigma\right)d\tau-\lambda\int_0^{\omega}X(\tau,\lambda)B(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega}F(\tau)\,d\tau\,. \tag{15}$$

Поскольку $\det M\neq 0$, то из (14) следует

$$X(t,\lambda)=M^{-1}\left[\int_0^{\omega}A(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}Y(\sigma,\lambda)d\sigma-\right.$$

$$\left.-\lambda\int_0^{\omega}X(\tau,\lambda)B(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega}F(\tau)\,d\tau\right]. \tag{16}$$

Таким образом, всякое решение задачи (2) – (5) является решением системы матричных интегральных уравнений (12), (16). Следуя [3], нетрудно показать обратное: всякое непрерывное решение $X=X(t,\lambda),\quad Y=Y(t,\lambda)$ системы интегральных уравнений (12), (16) является решением задачи (2) – (5).

Для исследования разрешимости системы(12), (16) используем модификацию [7] принципа Банаха-Каччиопполи [8, с. 605] сжимающих отображений.

Подставляя (7), (8) в (12), (16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим алгоритм (9), при этом ряды в (7), (8) сходятся равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.*** Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М., 1979.
2. ***Зубов В.И.*** Теория колебаний. – М., 1979.
3. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Мн., 1998.
4. ***Самойленко А.М., Ронто Н.И.*** Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев, 1976.
5. ***Лаптинский В.Н.*** Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова / В.Н. Лаптинский, В.А. Ливинская // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т.36. – № 9.– С.1289-1291.
6. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.
7. ***Забрейко П.П., Савченко Т.В.*** Принцип Банаха-Каччиопполи и теорема о неявной функции в бинормированном пространстве и ее приложения к дифференциальным уравнениям // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30. – № 3. – С.381-392.
8. ***Канторович Л.В., Акилов Г.П.*** Функциональный анализ. – М., 1977.

SUMMARY

The effective algorithm is proposed to construct the periodic solution of matrix differential equation of Lyapunov's type.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова