УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

n–АРНЫЕ АНАЛОГИ ХОЛЛОВСКИХ ПОДГРУПП

Холловские n-арные подгруппы определяются [1] аналогично холловским подгруппам [2]: если π – множество простых чисел, то n-арная подгруппа < B, [ ] > конечной n-арной группы < A, [ ] > называется π-холловской, если её порядок $|B|$ является наибольшим π-делителем порядка $|A|$, т.е. $|B| = |A|_{\pi}$. Если $\pi = \{p\}$, то $\{p\}$-холловская n-арная подгруппа называется p-силовской.

Следующее определение является естественным в силу того, что все классы конгруэнции, определённой на n-арной группе, имеют одну и ту же мощность [3, предложение 10.11].

1. Определение. Порядком конгруэнции в n-арной группе называется мощность смежных классов этой конгруэнции.

Если ρ – конгруэнция n-арной группы < A, [ ] >, то для обозначения её порядка в n-арной группе будем использовать символ $\|\rho\|$. При этом, если $\|\rho\| < \infty$, то ρ – назовём конечной конгруэнцией. В противном случае ρ – бесконечная конгруэнция.

2. Определение. Конгруэнция ρ конечной n-арной группы < A, [ ] > называется π-холловской, если её порядок в < A, [ ] > равен $|A|_{\pi}$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то π-холловская конгруэнция называется p-силовской.

Порядок конгруэнции ρ в n-арной группе < A, [ ] > не следует путать с её порядком $|\rho|$ как подалгебры в A^2. Согласно следствию из [3, с.169]

$$|A| = \|\rho\|\cdot|A/\rho|$$

для конечной n-арной группы < A, [ ] >.

Допуская вольность речи, в случаях, когда не возникает разночтений, будем говорить и писать "порядок конгруэнции" вместо "порядок конгруэнции в n-арной группе".

Существуют примеры n-арных групп, не имеющих холловских n-арных подгрупп, но обладающих нетривиальными холловскими конгруэнциями.

Имеет место

3. Предложение. Пусть ρ и σ – конечные конгруэнции, < C, [ ] > – конечная n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\|\rho\sigma\| = \dfrac{\|\rho\|\cdot\|\sigma\|}{\|\rho\cap\sigma\|}$;

2) $\|\rho C\| = \dfrac{\|\rho\|\cdot|C|}{\|\rho\cap C^2\|} = \dfrac{\|\rho\|\cdot|C|}{|\rho(a)\cap C|}$ для любого $a \in C$.

Если A – группа с единицей e, ρ и σ – её конгруэнции, то

$$(\rho\sigma)(u) = \rho(e)\sigma(e)u$$

для любого $u \in A$. В частности, $(\rho\sigma)(e) = \rho(e)\sigma(e)$. Отсюда и из теоремы 1 [4] получается следующая

4. Лемма. Если < A, [ ] > – n-арная группа, ρ и σ её конгруэнции, a, b $\in$ A, то

$$(\rho\sigma)(b) = \rho(a) @ \sigma(a) @ b = [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\sigma(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}b],$$

$$(\rho\sigma)(a) = \rho(a) @ \sigma(a) = [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\sigma(a)].$$

5. Лемма. Пусть σ – конгруэнция, < C, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Тогда < σC, @ > – подгруппа группы < A, @ >, причём $\sigma C = [\sigma(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}C]$ для любого $a \in A$.

6. Следствие. Пусть σ – конгруэнция,< C, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Тогда $\sigma C = [\sigma(a)\underbrace{C\ldots C}_{n-1}]$ для любого $a \in C$.

7. Следствие. [3, лемма 9.8]. Пусть < B, [ ] > и < C, [ ] > – n-арные подгруппы n-арной группы < A, [ ] >, причём < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >, и пусть ρ_B – конгруэнция, определяемая < B, [ ] >. Тогда $\rho_B C = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}C]$.

Доказательство. Если $a \in B$, то по предложению 7.4 [3], $\rho_B(a) = B$, откуда и из леммы 5 следует $\rho_B C = [B\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}C]$. Так < B, [ ] > – n-арная подгруппа, то из $a \in B$ вытекает $\bar{a} \in B$. Поэтому из последнего равенства следует доказываемое равенство. Следствие доказано.

8. Лемма. Если ρ – конгруэнция, $<B, [\,]>$ – n-арная подгруппа n-арной группы $<A, [\,]>$, то $<\rho B/\rho, \rho(a)> = <\rho B/\rho(a), @>$, для любого $a \in \rho B$.

Доказательство. Так как $\alpha = \rho \cap (\rho B)^2$ – конгруэнция на ρB, то по теореме 1 [4], $<\rho B/\alpha, \alpha(a)> = <\rho B/\alpha(a), @>$ для любого $\alpha \in \rho B$, откуда, учитывая $\alpha(a) = \rho(a)$ и обозначение $\rho B/\alpha = \rho B/\rho$, получим $<\rho B/\rho, \rho(a)> = <\rho B/\rho(a), @>$. Лемма доказана.

9. Теорема. Пусть ρ – конгруэнция, $<B, [\,]>$ – π-холловская n-арная подгруппа конечной n-арной группы $<A, [\,]>$, $a \in B$. Тогда: 1) $<B \cap \rho(a), @>$ – π-холловская подгруппа группы $<\rho(a), @>$, а $<\rho B/\rho(a), @>$ – π-холловская подгруппа группы $<A/\rho(a), @>$; 2) $<\rho B/\rho, [\,]>$ – π-холловская n-арная подгруппа n-арной группы $<A/\rho, [\,]>$.

Доказательство. 1) По теореме 1 [4], $<\rho(a), @>$ – инвариантная подгруппа группы $<A, @>$, а так как $a \in B$, то $<B, @>$ также подгруппа в $<A, @>$, которая к тому же π-холловская. Так как $\rho(a)\ @\ B = B\ @\ \rho(a)$, то по лемме 15.2 [2], $<B \cap \rho(a), @>$ – π-холловская подгруппа в $<\rho(a), @>$.

По лемме 9.5 [3], $<\rho B, [\,]>$ – n-арная подгруппа в $<A, [\,]>$. Так как $a \in B$, то $<B, @>$, как уже отмечалось, π-холловская подгруппа в $<A, @>$. Кроме того, по лемме 5, $\rho B = \rho(a)\ @\ B$. Снова применяя лемму 15.2 [2], заключаем, что $<\rho(a)\ @\ B/\rho(a), @> = <\rho B/\rho(a), @>$ – π-холловская подгруппа группы $<A/\rho(a), @>$.

2) По лемме 8,

$$<\rho B/\rho(a), @> = <\rho B/\rho, \rho(a)>, \quad <A/\rho(a), @> = <A/\rho, \rho(a)>.$$

Поэтому из доказанного в 1) и равенств

$$|<\rho B/\rho, \rho(a)>| = |<\rho B/\rho, [\,]>|, \quad |<A/\rho, \rho(a)>| = |<A/\rho, [\,]>|$$

вытекает, что $<\rho B/\rho, [\,]>$ – π-холловская n-арная подгруппа в $<A/\rho, [\,]>$. Теорема доказана.

10. Теорема. Пусть $<B, [\,]>$ – π-холловская, $<C, [\,]>$ – полуинвариантная n-арные подгруппы конечной n-арной группы $<A, [\,]>$, причём $B \cap C \neq \varnothing$. Тогда $<B \cap C, [\,]>$ – π-холловская n-арная подгруппа в $<C, [\,]>$, а

$$<[B\underbrace{C \ldots C}_{n-1}]/C, [\,]> = <[\underbrace{B \ldots B}_{n-1}C]/C, [\,]> -$$

π-холловская n-арная подгруппа в $<A/C, [\,]>$.

Доказательство. По предложению 7.4 [3], $<C, [\,]>$ определяет в $<A, [\,]>$ конгруэнцию ρ_C, причём $\rho_C(a) = C$ для любого $a \in C$. Поэтому, если $a \in B \cap C$, то по теореме 9, $<B \cap C, @>$ – π-холловская подгруппа в $<C, @>$, и значит $<B \cap C, [\,]>$ – π-холловская n-арная подгруппа в $<C, [\,]>$.

Согласно следствию 7, $\rho_C B = [B\underbrace{C \ldots C}_{n-1}]$, откуда и из теоремы 9 следует, что $<[B\underbrace{C \ldots C}_{n-1}]/C, @>$ – π-холловская подгруппа группы $<A/C, @>$ для любого $a \in B \cap C$. А так как по следствию 2 [4], $<[B\underbrace{C \ldots C}_{n-1}/C, ©> = <[B\underbrace{C \ldots C}_{n-1}]/C, @>$ для любого $a \in C$, то из

$$|\langle [B\underbrace{C\ldots C}_{n-1}]/C, [\ ]\rangle| = |\langle [B\underbrace{C\ldots C}_{n-1}]/C, ©\rangle|$$

следует, что $\langle [B\underbrace{C\ldots C}]/C, [\ ]\rangle$ – π-холловская n-арная подгруппа в $\langle A/C, [\ ]\rangle$. Осталось применить лемму 5.22 [3], согласно которой $[B\underbrace{C\ldots C}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}C]$. Теорема доказана.

11. Предложение. Пусть ρ и σ – конгруэнции конечной n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, причём σ – π-холловская, $a \in A$. Тогда $\langle \rho(a) \cap \sigma(a), @\rangle$ – π-холловская подгруппа группы $\langle \rho(a), @\rangle$, а $\langle (\rho\sigma)(a)/\rho(a), @\rangle$ – π-холловская подгруппа группы $\langle A/\rho(a), @\rangle$.

Доказательство. По теореме 1 [4], $\langle \rho(a), @\rangle$ и $\langle \sigma(a), @\rangle$ – инвариантные подгруппы группы $\langle A, @\rangle$. Поэтому

$$\rho(a) @ \sigma(a) = \sigma(a) @ \rho(a).$$

А так как $\langle \sigma(a), @\rangle$ – π-холловская в $\langle A, @\rangle$, то по лемме 15.2 [2], $\langle \rho(a) \cap \sigma(a), @\rangle$ – π-холловская подгруппа в $\langle \rho(a), @\rangle$, а $\langle \rho(a) @ \sigma(a)/\rho(a), @\rangle$ –π-холловская подгруппа в $\langle A/\rho(a), @\rangle$. Тогда, учитывая равенство $(\rho\sigma)(a) = \rho(a) @ \sigma(a)$ из леммы 4, заключаем, что $\langle (\rho\sigma)(a)/\rho(a), @\rangle$ – π-холловская подгруппа группы $\langle A/\rho(a), @\rangle$. Предложение доказано.

12. Теорема. Пусть σ – π-холловская конгруэнция, $\langle C, [\ ]\rangle$ – полуинвариантная n-арная подгруппа конечной n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$. Тогда $\sigma \cap C^2$ – π-холловская конгруэнция в $\langle C, [\ ]\rangle$, а $\langle \sigma C/C, [\ ]\rangle$ – π-холловская n-арная подгруппа n-арной группы $\langle A/C, [\ ]\rangle$.

Доказательство. Согласно первой теореме об изоморфизмах [3, теорема 9.7], $\sigma \cap C^2$ является конгруэнцией в $\langle C, [\ ]\rangle$. Кроме того, если $a \in C$, то по следствию 5.15 [3], $\langle C, @\rangle$ – инвариантна в $\langle A, @\rangle$, а по теореме 1 [4], $\langle \sigma(a), @\rangle$ – подгруппа в $\langle A, @\rangle$. Так как $|\sigma(a)| = \|\sigma\|$, то $\langle \sigma(a), @\rangle$ – π-холловская в $\langle A, @\rangle$. Применяя теперь соответствующий бинарный результат, заключаем, что $\langle \sigma(a) \cap C, @\rangle$ – π-холловская подгруппа в $\langle C, @\rangle$. Тогда из

$$\|\sigma \cap C^2\| = |(\sigma \cap C^2)(a)| = |\sigma(a) \cap C^2(a)| = |\sigma(a) \cap C|$$

следует, что $\sigma \cap C^2$ – π-холловская конгруэция в $\langle C, [\ ]\rangle$.

По лемме 9.5 [3], $\langle \sigma C, [\ ]\rangle$ — n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ]\rangle$. Поэтому $\langle \sigma C/C, [\ ]\rangle$ – n-арная подгруппа в $\langle A/C, [\ ]\rangle$. Зафиксировав $a \in C$ и применяя следствие 2[4], получим

$$\langle \sigma C/C, ©\rangle = \langle \sigma C, @\rangle / \langle C, @\rangle,$$

откуда и из леммы 5 следует

$$\langle \sigma C/C, ©\rangle = \langle \sigma(a) @ C, @\rangle / \langle C, @\rangle.$$

Применяя к правой части последнего равенства соответствующий бинарный результат, заключаем, что $\langle \sigma C/C, ©\rangle$ – π-холловская подгруппа в $\langle A/C, ©\rangle$. Тогда $\langle \sigma C/C, [\ ]\rangle$ – π-холловская n-арная подгруппа в $\langle A/C, [\ ]\rangle$. Теорема доказана.

Свойства E_π и C_π для n-арных групп определяются [1] также как и для групп [2]: конечная n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ обладает свойством E_π, если она имеет по крайней мере одну π-холловскую подгруппу; конечная n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ обладает свойством C_π, если она обладает свойством E_π и любые две её π-холловские n-арные подгруппы сопряжены в $\langle A, [\ ]\rangle$.

Определим ещё одно свойство: конечная n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ обладает свойством HC_π, если она обладает свойством E_π и любые две её π-холловские n-арные подгруппы полусопряжены в $\langle A, [\ ]\rangle$.

Полусопряжённость n-арных подгрупп определена Г.Н. Воробьёвым в [6].

13. Предложение. Пусть $< A, [\,] >$ – конечная n-арная группа. Если для некоторого $a \in A$ группа $< A, @ >$ обладает свойство C_π, то $< A, [\,] >$ не может иметь более одной π-холловской конгруэнции.

Доказательство. Если ρ и σ – π-холловские конгруэнции конечной n-арной группы $< A, [\,] >$, то по теореме 1 [4], $< \rho(a), @ >$ и $< \sigma(a), @ >$ – инвариантные подгруппы группы $< A, @ >$ для любого $a \in A$. Ясно, что обе указанные инвариантные подгруппы являются π-холловскими. А так как в $< A, @ >$ не может быть более одной инвариантной π-холловской подгруппы, то $\rho(a) = \sigma(a)$, откуда $\rho=\sigma$. Предложение доказано.

По предложению 8.1 [5], группы $< A, @ >$ и $< A_o, * >$ изоморфны. Поэтому группу $< A, @ >$ в предложении 13 можно заменить соответствующей группой Поста $< A_o, * >$.

14. Лемма. n-Арные подгруппы $< B, [\,] >$ и $< C, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ полусопряжены в ней тогда и только тогда, когда подгруппы

$$< B_a = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a], @ > \text{ и } < {}_aC = [a \underbrace{C \ldots C}_{n-1}], @ >$$

сопряжены в группе $< A, @ >$.

15. Теорема. Если конечная n-арная группа $< A, [\,] >$ обладает свойством E_π и имеет π'-холловскую конгруэнцию, то она обладает свойством HC_π.

Доказательство. Пусть $< B, [\,] >$ и $< C, [\,] >$ – π-холловские n-арные подгруппы в $< A, [\,] >$. Так как $|B_a| = |B|$, $|{}_aC| = |C|$ для любого $a \in A$, то $< B_a, @ >$ и $< {}_aC, @ >$ – π-холловские подгруппы в $< A, @ >$. Если σ – π'-холловская конгруэнция в $< A, [\,] >$, то по теореме 1 [4], $< \sigma(a), @ >$ – инвариантная подгруппа в $< A, @ >$, являющаяся к тому же π'-холловской. Применяя теперь теорему Шура-Цассенхауза, получаем сопряжённость подгрупп $< B_a, @ >$ и $< {}_aC, @ >$ в $< A, @ >$, откуда и из леммы 14 вытекает полусопряжённость n-арных подгрупп $< B, [\,] >$ и $< C, [\,] >$ в $< A, [\,] >$. Теорема доказана.

16. Следствие. Если n-арная группа $< A, [\,] >$ обладает свойством E_π и имеет хотя бы одну π'-холловскую полуинвариантную n-арную подгруппу, то она обладает свойством HC_π.

При изучении подгруппового строения конечных n-арных групп значительна роль сформулированной ниже теоремы Русакова.

17. Теорема [1]. Пусть $< A, [\,] >$ – конечная n-арная группа, $(|A|_{\pi'}, n-1) = 1$. Если соответствующая группа Поста $< A_o, * >$ обладает свойством C_π, то $< A, [\,] >$ также обладает свойством C_π.

Так как для любого $a \in A$ группы $< A_o, * >$ и $< A, @ >$ – изоморфны, то теорему Русакова можно сформулировать следующим образом.

18. Теорема. Пусть $< A, [\,] >$ – конечная n-арная группа, $(|A|_{\pi'}, n-1) = 1$. Если для некоторого $a \in A$ группа $< A, @ >$ обладает свойством C_π, то $< A, [\,] >$ также обладает свойством C_π.

Следующая теорема является n-арным аналогом теоремы Шура-Цассенхауза.

19. Теорема. Если конечная n-арная группа $< A, [\,] >$ имеет π'-холловскую конгруэнцию σ и $(|A|_{\pi'}, n-1) = 1$, то она обладает свойством C_π.

Доказательство. По теореме 1 [4], $< \sigma(a), @ >$ – инвариантная подгруппа группы $< A, @ >$, являющаяся к тому же π'-холловской. Тогда по теореме Шура-Цассенхауза, группа $< A, @ >$ обладает свойством C_π. Применяя теперь теорему Русакова, заключаем, что n-арная группа $< A, [\,] >$ обладает свойством C_π. Теорема доказана.

20. Следствие [1]. Если конечная n-арная группа < A, [ ] > имеет полуинвариантную π'-холловскуюп-арную подгруппу и ($|A|_{\pi'}$,n-1) = 1, то < A, [ ] > обладает свойством C_π.

Если ρ и σ – конгруэнции конечной n-арной группы < A, [ ] >, причём $\rho \subseteq \sigma$, то $\rho(a) \subseteq \sigma(a)$ и по теореме 1 [4], < $\rho(a)$, @ > и < $\sigma(a)$, @ > – подгруппы группы < A, @ > для любого $a \in A$. Так как $|\rho(a)|$ делит $|\sigma(a)|$, то $||\rho||$ делит $||\sigma||$. Поэтому следующее определение естественно.

21. Определение. Если ρ и σ – конгруэнции конечной n-арной группы < A, [ ] >, причём $\rho \subseteq \sigma$, то назовём индексом ρ в σ число $||\sigma|| / ||\rho||$, которое обозначим через $||\sigma : \rho||$, т.е.

$$||\sigma : \rho|| = ||\sigma|| / ||\rho||.$$

Так как $||\sigma|| = |\sigma(a)|$, $||\rho|| = |\rho(a)|$ для любого $a \in A$, то

$$||\sigma : \rho|| = |\sigma(a) : \rho(a)|.$$

Из определения также вытекает $||\sigma|| = ||\rho|| \cdot ||\sigma : \rho||$.

Следующая теорема и следствия из неё являются n-арными аналогами теоремы С.А. Чунихина [7] о сопряжённости π-холловсих подгрупп в π-отделимой группе.

22. Теорема. Пусть конечная n-арная группа < A, [ ] > обладает рядом конгруэнций

$$\nabla_A = \sigma_0 \supseteq \sigma_1 \supseteq \ldots \supseteq \sigma_{k-1} \supseteq \sigma_k = \Delta_A \ (k \geq 0)$$

таких, что каждый индекс $||\sigma_{i-1} : \sigma_i||$ делится не более чем на одно простое число из множества простых чисел π. Тогда, если в < A, [ ] > существуют π-холловские n-арные подгруппы, то любые две из них полусопряжены в < A, [ ] >.

Доказательство. По теореме 1 [4], следующий ряд

$$A = A_0 \supseteq A_1 = \sigma_1(a) \supseteq \ldots \supseteq A_{k-1} = \sigma_{k-1}(a) \supseteq \sigma_k = \{a\}$$

является нормальным рядом подгрупп группы < A, @ > для любого $a \in A$. Так как

$$|A_{i-1} : A_i| = |A_{i-1}| / |A_i| = |\sigma_{i-1}(a)| / |\sigma_i(a)| = ||\sigma_{i-1}|| / ||\sigma_i|| = ||\sigma_{i-1} : \sigma_i||,$$

то согласно условию, каждый индекс записанного нормального ряда делится не более чем на одно простое число из π. Следовательно, < A, @ > – π-отделимая группа.

Если < B, [ ] > и < C, [ ] > – π-холловские n-арные подгруппы из < A, [ ] >, то из $|B_a| = |B|$, $|{}_aC| = C$ следует, что < B_a, @ > и < ${}_aC$, @ > – π-холловские подгруппы π-отделимой группы < A, @ >, которые согласно теореме Чунихина [7] сопряжены в < A, @ >.

Применяя теперь лемму 14, получаем полусопряжённость n-арных подгрупп < B, [ ] > и < C, [ ] > в < A, [ ] >. Теорема доказана.

23. Следствие. Пусть конечная n-арная группа обладает полуинвариантным рядом n-арных подгрупп, каждый индекс которого делится не более чем на одно простое число из множества простых чисел π. Тогда, если в < A, [ ] > существуют π-холловские n-арные подгруппы, то любые две из них полусопряжёны в < A, [ ] >.

Полагая в теореме 22, $\pi = \{p\}$, получим

24. Следствие [8]. Если в конечной n-арной группе существуют p-силовские n-арные подгруппы, то любые две из них полусопряжёны в < A, [ ] >.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
2. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. – Мн.: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
4. ***Гальмак А.М.*** Первая теорема об изоморфизмах для n-арных групп // VIII Белорусская мат. конф. – Минск, 2000. – Часть 2. – С.28.

5. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. – Гомель, 1997. – 85 с.
6. ***Воробьёв Г.Н.*** О полусопряжённости n-арных подгрупп // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 10. – С.157-163.
7. ***Чунихин С.А.*** Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1964. – 158 с.
8. ***Воробьёв Г.Н., Гальмак А.М.*** n-Арный аналог теоремы Чунихина // Междунар. алгебраическая конф. – Славянск, 1997. – С.5-6.

SUMMARY

In this paper the Hall congruences of polyadic group are defined and studied.