УДК 517.9

С.В. ЖЕСТКОВ

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАНИИ К ПОСТРОЕНИЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В [1] предложен метод построения точных решений некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе дается строгое математическое обоснование некоторой модификации этого метода для уравнений распространения нелинейных волн в анизотропных средах. Рассматриваемая модификация представляет собой обобщение метода плоских многомерных волн (см. [2]) на случай уравнений, коэффициенты которых явно зависят от пространственных переменных. Она позволяет в некоторых ситуациях довести процесс построения точных решений до применения справочника [3].

1. Рассмотрим многомерное нелинейное волновое уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(u), \tag{1}$$

где $c_i(x_i)$, $i=\overline{1,l}$, $f(u)$ предполагаются достаточно гладкими функциями. Точное решение уравнения (1) предлагается строить в виде многомерной волны (ср. с [2]):

$$u=V(\xi),\quad \xi=\omega(\eta),\quad \eta=k(t)-\sum_{i=1}^{l} h_i(x_i), \tag{2}$$

где все неизвестные функции считаются гладкими функциями. Подставляя (2) в (1), получим:

$$V''(\xi)(\omega'(\eta))^2\left\{\left(\dot{k}(t)\right)^2-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2\right\}+V'(\xi)\omega''(\eta)\times$$

$$\times\left\{\left(\dot{k}(t)\right)^2-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2\right\}+V'(\xi)\omega'(\eta)\left\{\ddot{k}(t)+\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)h_i''(x_i)\right\}=f(V(\xi)). \tag{3}$$

В отличие от [1] функция $\omega(\eta)$ является произвольной, что позволяет в некоторых случаях довести процесс построения точных решений уравнения (1) до применения справочника [3].

Чтобы свести уравнение (3) к обыкновенному дифференциальному уравнению будем считать, что:

$$\left(\dot{k}(t)\right)^2-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2=k(t)-\sum_{i=1}^{l} h_i(x_i),$$

$$\ddot{k}(t)=\alpha,\quad c_i(x_i)h_i''(x_i)=\beta_i,\quad i=\overline{1,l},$$

где α, β_i – произвольные действительные числа. Тогда для неизвестных функций $k(t), h_i(x_i), c_i(x_i)$ можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$\ddot{k}(t) = \alpha, \quad \left(\dot{k}(t)\right)^2 = k(t), \tag{4}$$

$$c_i(x_i)h_i''(x_i) = \beta_i, \quad c_i(x_i)\left(h_i'(x_i)\right)^2 = h_i(x_i), \quad i = \overline{1,l}. \tag{5}$$

Из (4) находим:

$$k(t) = \frac{1}{4}(t+\lambda)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

где λ – произвольное действительное число. Чтобы найти решение системы (5), очевидно, достаточно решить систему из двух уравнений, в которой для упрощения записи опущен индекс i:

$$c(x)h''(x) = \beta = const, \quad c(x)\left(h'(x)\right)^2 = h(x). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что:

$$h(x) = \left(h(x_0) \pm \frac{1}{2} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{c(s)}} \right)^2 \equiv z^2(x),$$

$$z(x) \equiv h(x_0) \pm \frac{1}{2} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{c(s)}}.$$

Следовательно:

$$h''(x) = 2\left\{\left(z'(x)\right)^2 + z(x)z''(x)\right\}.$$

Подставляя это выражение в (6), получим:

$$\frac{z(x)\cdot c'(x)}{2\sqrt{c(x)}} \equiv z(x)\left(\sqrt{c(x)}\right)' = const. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$z'(x) = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{c(x)}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{c(x)} = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{z'(x)}.$$

Поэтому:

$$\left(\sqrt{c(x)}\right)' = \pm\frac{1}{2}\frac{\left(-z''(x)\right)}{\left(z'(x)\right)^2}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), найдем:

$$\frac{z''(x)z(x)}{\left(z'(x)\right)^2} = const. \tag{9}$$

Из (9), в частности, следует, что

$$\frac{z(x)}{z'(x)} = const, \quad \frac{z''(x)}{z'(x)} = const.$$

Поэтому рассматриваемое частное решение имеет вид:

$$z(x) = \mu\, exp(\nu x),$$

где μ, ν – произвольные действительные числа. Из него вытекает, что

$$h(x) = \mu^2 exp(2\nu x), \quad c(x) = (2\mu\nu)^{-2} exp(-2\nu x). \tag{I}$$

В этом случае уравнение (1) и его решение имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l}(\mu_i\nu_i)^{-2} exp(-2\nu_i x_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u),$$

$$u = V\left(\omega\left(\frac{1}{4}(t+\lambda)^2 - \sum_{i=1}^{l}\mu_i^2 exp(2\nu_i x_i)\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta) \equiv \eta$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$V''(\eta)\eta + V'(\eta)\left(\frac{1}{2} + l\right) = f(V(\eta)).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что уравнение (3) в этом случае имеет вид:

$$V''(\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\eta + V'(\omega(\eta))\omega''(\eta)\eta + V'(\omega(\eta))\omega'(\eta)\left(\frac{1}{2} + l\right) = f(V(\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Для решения уравнения (9) сделаем замену $z'(x) = p$. Тогда $z''(x) = p'_z z'_x = p'_z p$. Следовательно, уравнение (9) примет вид:

$$\frac{dp}{dz}\frac{z}{p} = const \quad \text{или} \quad p'_z = \frac{const}{z}p.$$

Решая это линейное уравнение, найдем $p = az^{\gamma}$, где $a, \gamma \neq 1$ – произвольные действительные числа. (Случай $\gamma = 1$ рассмотрен выше.) Поэтому имеем:

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = p = az^{\gamma}. \tag{10}$$

Интегрируя уравнение (10), получим:

$$\int\frac{dz}{z^{\gamma}} = \int a\,dx.$$

Следовательно,

$$z(x) = \{a(1-\gamma)\}^{\frac{1}{1-\gamma}} x^{\frac{1}{1-\gamma}} \equiv bx^{\rho},$$

$$b = \{a(1-\gamma)\}^{\frac{1}{(1-\gamma)}}, \qquad \rho = \frac{1}{(1-\gamma)}.$$

Поэтому окончательно найдем

$$h(x) = b^2 x^{2\rho}, \qquad c(x) = (2b\rho)^{-2} x^{2-2\rho}. \tag{II}$$

Отметим, что найденный класс решений может содержать особенность в нуле. В этом случае уравнение (1) и его решение имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l} (b_i \rho_i)^{-2} x_i^{2-2\rho_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u),$$

$$u = V\left(\omega\left(\frac{1}{4}(t+\lambda)^2 - \sum_{i=1}^{l} b_i^2 x_i^{2\rho_i}\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta) \equiv \eta$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$V''(\eta)\eta + V'(\eta)\left\{\frac{1}{2} + l - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\rho_i}\right\} = f(V(\eta)).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что уравнение (3) в этом случае имеет вид:

$$V''(\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\eta + V'(\omega(\eta))\omega''(\eta)\eta + V'(\omega(\eta))\omega'(\eta)\left(\frac{1}{2} + l - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\rho_i}\right) = f(V(\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Чтобы свести уравнение (3) к обыкновенному дифференциальному уравнению, можно также считать, что

$$\left(\dot{k}(t)\right)^2 = const, \quad \ddot{k}(t) = const, \quad c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2 = const, \quad c_i(x_i)h_i''(x_i) = const, \quad i = \overline{1,l}.$$

Тогда очевидно, что $k(t) = at + b$, где a, b – произвольные действительные числа. Чтобы решить оставшуюся систему дифференциальных уравнений, достаточно найти решение следующей системы из двух уравнений:

$$c(x)(h'(x))^2 = const, \qquad c(x)h''(x) = const.$$

Имеем:

$$h(x) = \varepsilon - \frac{1}{p} ln|px + q|, \qquad c(x) = d(px+q)^2, \tag{III}$$

где ε, p, q, d – произвольные действительные числа.

В этом случае уравнение (1) и его решение имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l} d_i\left(p_i x_i+q_i\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{2}}=f(u),$$

$$u=V\left(\omega\left(at+b-\sum_{i=1}^{l}\left\{\varepsilon_i-\frac{1}{p_i}\ln\left|p_i x_i+q_i\right|\right\}\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta)\equiv\eta$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$V''(\eta)\left(a^2-\sum_{i=1}^{l} d_i\right)+V'(\eta)\sum_{i=1}^{l} d_i p_i=f\left(V(\eta)\right).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что уравнение (3) в этом случае имеет вид:

$$V''\left(\omega(\eta)\right)\left(\omega'(\eta)\right)^2\left(a^2-\sum_{i=1}^{l} d_i\right)+V'\left(\omega(\eta)\right)\omega''(\eta)\left(a^2-\sum_{i=1}^{l} d_i\right)+$$
$$+V'\left(\omega(\eta)\right)\omega'(\eta)\sum_{i=1}^{l} d_i p_i=f\left(V\left(\omega(\eta)\right)\right).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

2. Рассмотрим многомерное нелинейное волновое уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_i(x_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f(u). \tag{11}$$

Подставляя решение (2) в (11), получим:

$$V''(\xi)\left(\omega'(\eta)\right)^2\left\{\left(\dot{k}(t)\right)^2-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)\left(h_i'(x_i)\right)^2\right\}+V'(\xi)\omega''(\eta)\times$$
$$\times\left\{\left(\dot{k}(t)\right)^2-\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)\left(h_i'(x_i)\right)^2\right\}+ \tag{12}$$
$$+V'(\xi)\omega'(\eta)\left\{\ddot{k}(t)+\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)h_i''(x_i)+\sum_{i=1}^{l} c_i'(x_i)h_i'(x_i)\right\}=f\left(V(\xi)\right).$$

Нетрудно проверить, что для найденных выше классов функций (I), (II), (III) выполняется дополнительное соотношение:

$$c'(x)h'(x)=const,$$

которое позволяет распространить полученные выше результаты на уравнения вида (11). Для класса функций (I) уравнение (11) и его решение примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l}(\mu_i\nu_i)^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(exp(-2\nu_i x_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f(u),$$

$$u=V\left(\omega\left(\frac{1}{4}(t+\lambda)^2-\sum_{i=1}^{l}\mu_i^2\,exp(2\nu_i x_i)\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta)\equiv\eta$. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$V''(\eta)\eta+\frac{1}{2}V'(\eta)=f(V(\eta)).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что в этом случае уравнение (12) имеет вид:

$$V''(\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\eta+V'(\omega(\eta))\omega''(\eta)\eta+\frac{1}{2}V'(\omega(\eta))\omega'(\eta)=f(V(\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Для класса функций (II) уравнение (11) и его решение примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l}(b_i\rho_i)^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{2-2\rho_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f(u),$$

$$u=V\left(\omega\left(\frac{1}{4}(t+\lambda)^2-\sum_{i=1}^{l}b_i^2x_i^{2\rho_i}\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta)\equiv\eta$. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$V''(\eta)\eta+V'(\eta)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\rho_i}\right)=f(V(\eta)).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что в этом случае уравнение (12) имеет вид:

$$V''(\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\eta+V'(\omega(\eta))\omega''(\eta)\eta+V'(\omega(\eta))\omega'(\eta)\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\rho_i}\right\}=f(V(\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Для класса функций (III) уравнение (11) и его решение примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(d_i(p_ix_i+q_i)^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f(u),$$

$$u=V\left(\omega\left(at+b-\sum_{i=1}^{l}\left\{\varepsilon_i-\frac{1}{p_i}ln|p_ix_i+q_i|\right\}\right)\right).$$

Чтобы найти функцию V предположим, например, что $\omega(\eta) \equiv \eta$. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$V''(\eta)\left(a^2 - \sum_{i=1}^{l} d_i\right) - V'(\eta)\sum_{i=1}^{l}(d_i p_i) = f(V(\eta)).$$

Полученное уравнение содержится в справочнике [3, с. 489-491]. Вообще говоря, заметим, что в этом случае уравнение (12) имеет вид:

$$V''(\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\left(a^2 - \sum_{i=1}^{l} d_i\right) + V'(\omega(\eta))\omega''(\eta)\left(a^2 - \sum_{i=1}^{l} d_i\right) -$$
$$- V'(\omega(\eta))\omega'(\eta)\sum_{i=1}^{l} d_i p_i = f(V(\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

3. Для уравнения (1) можно строить и более сложные решения вида

$$u = V(t,r), \quad r = \omega(\eta), \quad \eta = -\sum_{i=1}^{l} h_i(x_i). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (1), получим:

$$\ddot{V}(t,r) - \sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)\left\{\begin{matrix} V''(t,r)(\omega'(\eta))^2(h_i'(x_i))^2 + V'(t,r)\omega''(\eta)(h_i'(x_i))^2 - \\ - V'(t,r)\omega'(\eta)h_i''(x_i) \end{matrix}\right\} = f(V(t,r)). \tag{14}$$

Чтобы свести уравнение (14) к уравнению с двумя переменными t, η будем считать, что

$$\sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{l} h_i(x_i), \qquad \sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)h_i''(x_i) = -\sum_{i=1}^{l} h_i(x_i).$$

Тогда для неизвестных $h_i(x_i)$, $c_i(x_i)$ можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2 = h_i(x_i), \quad c_i(x_i)h_i''(x_i) = -h_i(x_i), \quad i = \overline{1,l}. \tag{15}$$

Для решения системы (15), очевидно, достаточно решить систему из двух уравнений:

$$c(x)(h'(x))^2 = h(x), \quad c(x)h''(x) = -h(x). \tag{16}$$

Из (16) имеем

$$(h'(x))^2 = -h''(x).$$

Следовательно, $h(x) = \varepsilon + ln|x + d|$, где ε, d – произвольные действительные числа, а функция $c(x)$ определяется формулой

$$c(x)=(x+d)^2\{\varepsilon+ln|x+d|\}.$$

В этом случае уравнение (1) и его решение имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}(x_i+d_i)^2\{\varepsilon_i+ln|x_i+d_i|\}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}=f(u),$$

$$u=V\left(t,\omega\left(-\sum_{i=1}^{l}\left[\varepsilon_i+ln|x_i+d_i|\right]\right)\right).$$

Для определения функции V из (14) получаем следующее уравнение:

$$\ddot{V}(t,\omega(\eta))+\eta\left\{V''(t,\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2+V'(t,\omega(\eta))[\omega''(\eta)+\omega'(\eta)]\right\}=f(V(t,\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Уравнение (14) можно свести к уравнению с двумя переменными t,η, если считать, что

$$c_i(x_i)(h_i'(x_i))^2=\alpha_i,\quad c_i(x_i)h_i''(x_i)=\beta_i,\quad i=\overline{1,l},\qquad (17)$$

где α_i, β_i – произвольные действительные числа. Для решения системы (17) достаточно решить систему из двух уравнений:

$$c(x)(h'(x))^2=\alpha=const,\quad c(x)h''(x)=\beta=const.$$

Из нее следует, что

$$\frac{h''(x)}{(h'(x))^2}=p=const.$$

Поэтому имеем:

$$h(x)=\delta-\frac{1}{p}ln|px+q|,$$

где δ, p, q – произвольные действительные числа. Следовательно

$$c(x)=\alpha(px+q)^2.$$

В этом случае уравнение (1) и его решение имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(p_ix_i+q_i)^2\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}=f(u),$$

$$u=V\left(t,\omega\left(-\sum_{i=1}^{l}\left\{\delta_i-\frac{1}{p_i}ln|p_ix_i+q_i|\right\}\right)\right).$$

Для определения функции V из (14) получаем следующее уравнение:

$$\ddot{V}(t,\omega(\eta))-V''(t,\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2\sum_{i=1}^{l}\alpha_i-V'(t,\omega(\eta))\omega''(\eta)\sum_{i=1}^{l}\alpha_i+$$
$$+V'(t,\omega(\eta))\omega'(\eta)\sum_{i=1}^{l}\beta_i=f(V(t,\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

4. Для уравнения (11) также можно строить решения вида (13). Подставляя (13) в (11), получим:

$$\ddot{V}(t,r)-\sum_{i=1}^{l}c_i(x_i)\{V''(t,r)(\omega'(\eta))^2(h_i'(x_i))^2+V'(t,r)\omega''(\eta)(h_i'(x_i))^2-$$
$$-V'(t,r)\omega'(\eta)h_i''(x_i)\}+\sum_{i=1}^{l}c_i'(x_i)V'(t,r)\omega'(\eta)h_i'(x_i)=f(V(t,r)). \quad (18)$$

Для найденных выше классов функций

$$h(x)=\varepsilon+ln|x+d|,\quad c(x)=(x+d)^2\{\varepsilon+ln|x+d|\}, \quad (IV)$$

$$h(x)=\delta-\frac{1}{p}ln|px+q|,\quad c(x)=\alpha(px+q)^2 \quad (V)$$

справедливы следующие соотношения:

для (IV) – $h'(x)c'(x)=2h(x)+1$; для (V) – $h'(x)c'(x)=-2\alpha$.

Поэтому для класса функций (IV) уравнение (11) и его решение примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(x_i+d_i)^2(\varepsilon_i+ln|x_i+d_i|)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}=f(u),$$

$$u=V\left(t,\omega\left(-\sum_{i=1}^{l}\{\varepsilon_i+ln|x_i+d_i|\}\right)\right).$$

Для определения функции V из (18) получаем следующее уравнение:

$$\ddot{V}(t,\omega(\eta))+\eta\{V''(t,\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2+V'(t,\omega(\eta))[\omega''(\eta)+\omega'(\eta)]\}+$$
$$+V'(t,\omega(\eta))[-2\eta+l]=f(V(t,\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

Для класса функций (V) уравнение (11) и его решение примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\alpha_i(p_ix_i+q_i)^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}=f(u),$$

$$u = V\left(t, \omega\left(-\sum_{i=1}^{l}\left\{\delta_i - \frac{1}{p_i} ln\left|p_i x_i + q_i\right|\right\}\right)\right).$$

Для определения функции V из (18) получаем следующее уравнение:

$$\ddot{V}(t,\omega(\eta)) + \eta\left\{V''(t,\omega(\eta))(\omega'(\eta))^2 + V'(t,\omega(\eta))[\omega''(\eta) + \omega'(\eta)]\right\} -$$
$$-2V'(t,\omega(\eta))\sum_{i=1}^{l}\alpha_i = f(V(t,\omega(\eta))).$$

Его анализ требует отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Полянин А.Д., Журов А.И.*** Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики // Докл. РАН. 1998. – Т.360. – №5. – С.640-644.
2. ***Жестков С.В., Кувшинов В.И.*** Об одном замечании к теории многомерных волн // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – №1. – С.76-78.
3. ***Камке Э.*** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1971.

SUMMARY

Exact solutions of nonlinear equations describing propagation of nonlinear waves in anisotropic media are constructed on the base of the plane multidimensional wave method.