УДК 515.1 (078)

Ю.П. ЗОЛОТУХИН

МОДЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ПРЕПОДАВАНИИ ТОПОЛОГИИ

Анализируя современное состояние высшего образования в РБ, профессор В.А.Гайсенак в статье «Да пытання рэфармавання вышэйшай школы» (ВШ. – 1996. – №2) справедливо отмечает, что «педагогіка вышэйшай школы, як навуковы накірунак, развіта ў рэспубліцы ў недастатковай ступені». Уточняя этот тезис, можно особо указать на неразработанность общих и частных методик преподавания дисциплин в вузе. Несформированность вузовской педагогики и, особенно, предметных дидактик, будучи исторически и социально обусловленной, становится тем не менее все большим тормозом для развития высшего образования, препятствует росту профессионального мастерства преподавателей.

В частности, еще не проведено сколько-нибудь полного, систематизирующего и обобщающего осмысления проблем преподавания математики в вузе. Понимая, что таковое представляет не столько законченный акт, сколько многоплановый непрерывный процесс, обратим внимание на существование общей части школьной и вузовской дидактик математики. Поскольку первая из них развита в несравнимо большей степени, целесообразно использовать её достижения и в преподавании высшей математики. В данной статье обсуждается возможность реализации одной из плодотворных идей общей дидактики – выделения базового уровня изучения дисциплины и фиксации минимальных результатов обучения – при организации университетского курса топологии.

1. Дидактика топологии как частная дидактика. Считается, что топология оформилась в самостоятельный раздел математики в 1914 году, когда вышла книга Феликса Хаусдорфа «Теория множеств». В ней были подведены итоги начального этапа развития теоретико-множественной топологии.

Прошедшие с того времени годы – небольшой период в эволюции науки. Можно сказать, что топология находится ещё в подростковом возрасте: основы её сформированы, главные методы разработаны, однако продолжается уточнение понятий, совершенствуется структура, возникают новые направления, расширяются сферы применения.

Преподавание же учебной дисциплины, как известно, следует за научными исследованиями с некоторым отставанием. В частности, дидактика топологии как фрагмент общей дидактики математики ещё находится в стадии разработки.

Чтобы определить её место в общей теории обучения математике, нужно осмыслять особенности, отличающие топологию как математическую науку. К ним, в первую очередь, следует отнести:

– универсальный характер общей топологии как языка современной математики;

– широкий охват разнородных математических объектов;

– чрезвычайно высокий уровень абстрактности основных понятии и конструкций;

– повышенная степень детализации при изучении конкретных объектов;
– сложность логической структуры теории в целом и отдельных её частей;
– необычность многих построений и способов их описания;
– мировоззренческая и философская насыщенность содержания.

Неслучайно Ф.Хаусдорф в указанной выше книге отмечал, что теоретико-множественная топология – это «область, где ничто не является очевидным, где истинные утверждения звучат парадоксально, а правдоподобные зачастую оказываются ложными».

Отмеченные особенности определяют и специфику топологии как учебного предмета. Следует признать, что на практике она превратилась в элитарную дисциплину, малодоступную большинству изучающих её студентов. Такое положение вступает в противоречие с важной внутрипредметной ролью и большим прикладным значением топологии в математике и смежных науках.

Кем и как формируются принципы и методы преподавания тополологии? Во-первых, авторами немногочисленных учебников, которые выстраивают структуру и содержание дисциплины, в первую очередь, с позиций науки. Во-вторых, на конкретно-практическом уровне разработку дидактики топологии проводят преподаватели этого предмета, они же – авторы методических пособий и рекомендаций местного значения. К сожалению, опыт последних остается разрозненным и малоизвестным, никем не обобщается, специальные публикации по методике преподавания топологии практически отсутствуют.

Таким образом, представления о топологии как о трудной, оторванной от приложений дисциплине зиждется не только на её объективной сложности и абстрактности, но и, в большой степени, на неразработанности методики её преподавания (впрочем, они связаны и с неадекватным местом топологии в учебных планах подготовки математиков – её объединением с дифференциальной геометрией, отсутствием в них теории множеств, алгебраической и дифференциальной топологии, не говоря уже о более специальных разделах).

Мы не берёмся здесь формулировать основные направления разработки такой методики, однако в настоящее время главное из них, по нашему мнению, должно быть связано с необходимостью сделать преподавание максимально доступным пониманию студентов и технологически удобным.

Думаем, что решение этой задачи должно быть сопряжено с выделением базового уровня изучения топологии и определением соответствующего ему содержания – постоянной части, ядра дисциплины. Очевидно, он должен быть достаточным для того, чтобы продолжать изучение топологии на продвинутом уровне и, с другой стороны, обеспечить уверенное применение топологических знаний, умений и навыков в стандартных ситуациях. Заметим, что в преподавании классических дисциплин (алгебры, геометрии, анализа) базовый уровень более или менее четко зафиксирован и подкреплен большим количеством типовых задач и упражнений.

С этой общей методической проблемой связано много более конкретных. Одной из самых актуальных из них представляется составление целостной системы задач, упражнений и вопросов базового уровня по теоретико-множественной топологии.

Преподавателям хорошо известно, что задачный материал – одно из самых слабых мест в обучении топологии. Задачников, пригодных для использования в массовой аудитории, нет, а практические задания, предлагаемые в известных нам учебниках, не обеспечивают последовательного применения излагаемой теории и, соответственно, формирования устойчивых элементарных топологических умений и навыков.

Имеющиеся в них задачи, как правило, немногочисленны, неполны и не согласованы по уровню сложности. Временные затраты на их решение не учитываются. В связи с этим проведение практических и лабораторных занятий по топологии до сих пор представляет серьёзную методическую проблему.

На наш взгляд, разумная альтернатива сложившейся ситуации может быть связана с построением системы типовых задач, сконструированных на основе модельных топологических пространств, и последовательным использованием ее на всех этапах обучения теоретико-множественной топологии. В качестве примера одной из компонент такой системы можно привести набор задач, посвященных трёхэлементным топологическим пространствам.

2. Топология трехэлементных множеств – образец законченной учебной теории. Известно, что теория конечных множеств настолько содержательна, что получила специальное название – комбинаторика. С другой стороны, информация о топологии конечных множеств в учебной литературе практически отсутствует. Возможно, это объясняется её относительной бедностью по сравнению с топологией бесконечных множеств и, как следствие, нацеленностью учёных-топологов на решение более серьёзных проблем. В то же время, топология конечных множеств, допуская исчерпывающее описание, представляет хороший образец учебной математической теории. Оказалось, что на уровне обучения она достаточно нетривиальна и содержит много интересных фактов.

В познавательном плане её значение состоит в том, что она знакомит с истоками общей топологии, показывает её как бы в момент зарождения: для одноэлементного множества дискретная и антидискретная топологии ещё неразличимы, в случае двухэлементного множества между ними вклиниваются две простейшие топологии – связные двоеточия, с переходом к трёхэлементному – число пространств, аппроксимируемых антидискретным и дискретным, возрастает до 27. С увеличением мощности носителя свойства конечных топологий становятся всё более разнообразными и постепенно начинают приближаться к свойствам счётных.

Естественным образом возникает потребность изучения счетных, континуальных и других топологических пространств. Другими словами, использование конечных пространств помогает реализовать генетический и, одновременно, проблемно-поисковый подходы в преподавании теоретико-множественной топологии. Представление же об их дидактической ценности можно получить, например, анализируя основные свойства трёхэлементных пространств.

Как уже было отмечено, на множестве из трёх элементов можно построить 29 топологий. Они разбиваются на 9 классов по отношению к топологической эквивалентности. Одна из полных систем топологических инвариантов совокупности трёхэлементных пространств состоит из количества одноэлементных множеств, количества двухэлементных множеств и веса топологии.

В таблице 1 приведена соответствующая классификация топологий на трёхэлементном множестве $X=\{a,b,c\}$. В ней приняты обозначения для конечных множеств: $a=\{a\}$, $ab=\{a,b\}$, $abc=\{a,b,c\}$ и т.д. Под эквивалентными понимаются топологии, порождающие гомеоморфные пространства на одном и том же носителе. Классы эквивалентных топологий обозначаются через $K_1,\dots,K_9$.

Далее, если топология, заданная на множестве $X=\{a,b,c\}$, содержит m одноэлементных и n двухэлементных подмножеств X, то её обозначаем через τ_{mn}^{p}, где p – ее порядковый номер в списке топологий данного комбинаторного типа.

Конечные топологические пространства обладают характерным свойством, отличающим их от бесконечных: совокупность φ замкнутых множеств конечного топологического пространства (X,τ) есть топология на множестве X. Она может совпадать и не совпадать с топологией τ. Очевидно, $\varphi=\tau$ тогда и только тогда, когда в пространстве нет открытых, но незамкнутых (строго открытых) и замкнутых, но неоткрытых (строго замкнутых) множеств. Другими словами, когда любое множество является либо открыто-замкнутым, либо – ни открытым, ни замкнутым.

Классификация топологий на трехэлементном множестве

Классы эквивалентных топологий	Топологии, образующие классы	Состав топологий	Топологии дополнения
K_1	τ_{00}^1	$\varnothing, X$	$\varphi_{00}^1=\tau_{00}^1$
K_2	τ_{01}^1	$\varnothing, X, ab$	$\varphi_{01}^1=\tau_{10}^3$
	τ_{01}^2	$\varnothing, X, ac$	$\varphi_{01}^2=\tau_{10}^2$
	τ_{01}^3	$\varnothing, X, bc$	$\varphi_{01}^3=\tau_{10}^1$
K_3	τ_{10}^1	$\varnothing, X, a$	$\varphi_{10}^1=\tau_{01}^3$
	τ_{10}^2	$\varnothing, X, b$	$\varphi_{10}^2=\tau_{01}^2$
	τ_{10}^3	$\varnothing, X, c$	$\varphi_{10}^3=\tau_{01}^1$
K_4	τ_{11}^1	$\varnothing, X, a, ab$	$\varphi_{11}^1=\tau_{11}^6$
	τ_{11}^2	$\varnothing, X, a, ac$	$\varphi_{11}^2=\tau_{11}^4$
	τ_{11}^3	$\varnothing, X, b, ab$	$\varphi_{11}^3=\tau_{11}^5$
	τ_{11}^4	$\varnothing, X, b, bc$	$\varphi_{11}^4=\tau_{11}^2$
	τ_{11}^5	$\varnothing, X, c, ac$	$\varphi_{11}^5=\tau_{11}^3$
	τ_{11}^6	$\varnothing, X, c, bc$	$\varphi_{11}^6=\tau_{11}^1$
K_5	τ_{11}^7	$\varnothing, X, a, bc$	$\varphi_{11}^7=\tau_{11}^7$
	τ_{11}^8	$\varnothing, X, b, ac$	$\varphi_{11}^8=\tau_{11}^8$
	τ_{11}^9	$\varnothing, X, c, ab$	$\varphi_{11}^9=\tau_{11}^9$
K_6	τ_{12}^1	$\varnothing, X, a, ab, ac$	$\varphi_{12}^1=\tau_{21}^3$
	τ_{12}^2	$\varnothing, X, b, ab, bc$	$\varphi_{12}^2=\tau_{21}^2$
	τ_{12}^3	$\varnothing, X, c, ac, bc$	$\varphi_{12}^3=\tau_{21}^1$

Окончание таблицы

Классы эквивалентных топологий	Топологии, образующие классы	Состав топологий	Топологии дополнения
K_7	τ_{21}^1 τ_{21}^2 τ_{21}^3	$\varnothing, X,a,b,ab$ $\varnothing, X,a,c,ac$ $\varnothing, X,b,c,bc$	$\varphi_{21}^1=\tau_{12}^3$ $\varphi_{21}^2=\tau_{12}^2$ $\varphi_{21}^3=\tau_{12}^1$
K_8	τ_{22}^1 τ_{22}^2 τ_{22}^3 τ_{22}^4 τ_{22}^5 τ_{22}^6	$\varnothing, X,a,b,ab,ac$ $\varnothing, X,a,b,ab,bc$ $\varnothing, X,a,c,ab,ac$ $\varnothing, X,a,c,ac,bc$ $\varnothing X,b,c,ab,bc$ $\varnothing, X,b,c,ac,bc$	$\varphi_{22}^1=\tau_{22}^6$ $\varphi_{22}^2=\tau_{22}^4$ $\varphi_{22}^3=\tau_{22}^5$ $\varphi_{22}^4=\tau_{22}^2$ $\varphi_{22}^5=\tau_{22}^3$ $\varphi_{22}^6=\tau_{22}^1$
K_9	τ_{33}^1	$\varnothing, X,a,b,c,ab,bc,ac$	$\varphi_{33}^1=\tau_{33}^1$

Чтобы продолжить описание свойств рассматриваемых пространств, удобно ввести *оператор дополнения* C на совокупности топологий конечного множества, который каждой топологии τ ставит в соответствие *топологию дополнения* C_τ, состоящую из дополнений множеств, входящих в τ, то есть $C_\tau=\varphi$.

Обозначим через CK_i класс пространств над множеством X с топологиями дополнения класса K_i (*дополнительный класс* по отношению к классу K_i). Назовем классы K_i и K_p ***взаимно дополнительными***, если $K_p=CK_i$ (тогда, в силу идемпотентности дополнения, и $K_i=CK_p$). Если же $K_i=CK_i$, то класс K_i назовем самодополнительным.

Оказывается, самодополнительные классы конечноэлементных пространств могут быть двух типов: строго самодополнительным – когда топология дополнения для каждого пространства этого класса совпадает с топологией этого пространства; нестрого самодополнительным – в противном случае.

Несложный анализ показывает, что по введенному отношению дополнения совокупность трехэлементных топологических пространств разбивается на следующие группы (см. табл.): взаимно дополнительные – $K_2 u K_3, K_6 u K_7$, самодополнительные – $K_1\ K_4, K_5, K_8, K_9$, причём из них строго самодополнительными являются K_1, K_5, K_9, а нестрого самодополнительными – K_4 и K_8.

Хотя отношение дополнения, как видим, не является топологическим, оно помогает сделать интересные наблюдения топологического характера. Так, наряду с известными антидискретным и дискретным пространствами, с его помощью получаются и нетривиальные примеры пространств, в которых нет ни одного строго открытого и ни одного замкнутого множества. Таковыми являются все пространства строго самодополнительного класса K_5. Студенту, воспитанному на метрических пространствах, эти примеры не только покажутся неожиданными, но и дадут пищу для размышления.

Какими топологическими свойствами обладают трехэлементные пространства? Как и все конечные пространства, они, очевидно, удовлетворяют аксиомам счетности. Естественно, все они представляют собой компактные пространства.

С отделимостью дело обстоит плохо: все пространства классов $K_1 - K_8$ не удовлетворяют даже аксиоме τ_0 и, следовательно, не являются хаусдорфовыми, регулярными или нормальными. В противоположность им единственное пространство класса K_9 – дискретное – удовлетворяет основным аксиомам отделимости и, в частности, условию нормальности.

Отсюда, например, вытекает, что пространства классов $K_1 - K_8$ неметризуемые. Таким образом, из трехэлементных пространств только дискретное оказалось метризуемым. Его порождает, очевидно, стандартная дискретная метрика.

Наибольший интерес трёхэлементные пространства представляют с точки зрения демонстрации свойств связности. Подсчитывая число открыто-замкнутых множеств для каждого из них, легко определить, что пространства классов $K_1 - K_4, K_6, K_7$ связные. Несколько более сложным путём устанавливается, что все они являются и линейно-связными. Остальные пространства (классов K_5, K_8, K_9) несвязные и, следовательно, не линейно-связные. При этом у пространств класса K_8 компоненты связности и компоненты линейной связности не совпадают. Так, пространство (X, τ_{22}^1) имеет две компоненты связности ($\{b\}$ и $\{a,c\}$) и три компоненты линейной связности ($\{a\}, \{b\}$ и $\{c\}$). Это познавательное наблюдение также можно использовать в учебных целях.

Итак, применяя трёхэлементные пространства, можно составить содержательные задачи ко всем основным разделам общей топологии:

– найти все топологические пространства над трехэлементным множеством;

– провести топологическую классификацию трёхэлементных пространств;

– построить полную систему топологических инвариантов трёхэлементных пространств;

– исследовать топологические свойства трёхэлементных пространств и т.д.

При этом представляются особенно важными два момента: во-первых, такие задачи, естественно поставленные и доступные каждому студенту, на одном и том же материале можно сконструировать ко всем разделам дисциплины и на их фундаменте организовать непрерывную линию содержательной практической работы; во-вторых, самостоятельное получение, осмысление и накопление фактов, моделируя процесс построения математической теории, будет способствовать выработке у студентов навыков исследовательской работы.

Существенно, что «задачи на конечные пространства» отличаются простотой и технологичностью. Решение их, как правило, не занимает много времени. В данном случае простота – плюс, поскольку в учебниках по топологии простых задач не так много. С их помощью удобно рассматривать понятия и факты в чистом виде, не отвлекаясь на технические трудности.

Поскольку для конечных пространств можно выписать в явном виде все открытые и все замкнутые множества, студенты получают возможность «проникнуть во все их закоулки», решить любой вопрос в конструктивной, законченной форме.

Кроме того, имеет значение, что таких задач можно придумать много, ведь только трёхэлементных пространств – 29. Этим обстоятельством удобно распорядиться в технологических целях при организации различных видов учебной и учебно-исследовательской работы, например, при составлении вариантов индивидуальных расчётных заданий.

С другой стороны, теория конечных пространств более содержательна и полезна, чем кажется на первый взгляд. В частности, она помогает осмыслить соотношение между вкладами носителя и топологии в совокупность свойств пространства. Например, конечное пространство Зарисского (конечное дискретное пространство) обладает свойствами во многом противоположными свойствам бесконечного пространства Зарисского.

Добавим ещё, что в процессе преподавания материал, посвященный пространствам с конечным числом элементов, целесообразно поместить в особый раздел, так как качественные результаты для них, как правило, весьма специфичны.

3. Перспективы использования модельных пространств. Мы описали в общих чертах топологию трёхэлементных множеств, чтобы показать, какие познавательные, учебные, да и воспитательные возможности может представить систематическое изучение реальных пространств. Акцент на конечные пространства поставлен потому, что они недооцениваются в преподавании топологии и имеют методическую новизну.

Наш опыт преподавания позволяет сделать вывод о том, что перманентное применение в обучении различных модельных пространств (в том числе и конечных) для иллюстрации основных понятий, фактов и методов, дает большой педагогический эффект. Именно они должны составить ядро системы заданий базового уровня (типовых задач) по теоретико-множественной топологии, которая, в свою очередь, может стать первой ступенькой в восхождении к задачам повышенной трудности.

Каким главным требованиям обязана удовлетворять система типовых задач по топологии? Прежде всего, она должна обеспечить содержательную и доступную интерпретацию топологической теории на учебном уровне. В то же время, она должна представлять интерес с точки зрения математики и её приложений. Комплексные задачи, составленные на базе важнейших топологических пространств, очевидно, удовлетворяют обоим указанным требованиям.

Вопрос об определении минимума модельных пространств для использования на базовом уровне обучения трудно решить однозначно. Понятно, что к ним могут быть отнесены пространства двух типов – общие, т.е. с абстрактным множеством в качестве носителя, и конкретные. К первому типу относятся, например, общие конечные, счетные, бесконечные несчетные, метрические, антидискретное, дискретное, Зарисского пространства, ко второму – пространства R^1, R^2, R^3, R^n, конкретные функциональные пространства, проективные пространства, стрелки, прямая Зоргенфрея, плоскость Немыцкого, прямые произведения шаров и сфер евклидовых пространств, фактор-пространства многоугольных областей и т.д.

В практике преподавания общей топологии в Гродненском университете важное место отводится иллюстрированию понятий и фактов, выработке элементарных топологических навыков на примерах евклидовых пространств и их подпространств. В этих целях активно используются числовые промежутки и другие подмножества числовой прямой (включая N, Z, Q, R), сферы, шары, торы, полнотории, другие кривые, поверхности и тела. Именно евклидовы пространства и их подпространства представляют, по нашему мнению, главную основу для составления типовых задач.

Привлекаются и геометрические пространства, эквивалентные евклидовым, а также пространства с абстрактным носителем. Систематически используются стрелка и бесконечное пространство с топологией конечных дополнений – содержательные образцы неметризуемых пространств.

Прямые произведения простейших пространств, лента Мебиуса, а также фактор-пространства квадрата, не допускающие вложения в R^3, появляются на последних лабораторных занятиях по обшей топологии, так как операции над пространствами у нас по традиции завершают этот раздел. В дальнейшем они достаточно полно рассматриваются на теоретическом уровне в разделе «Топологические многообразия». Здесь мы продвигаемся вплоть до квалификационных теорем для ориентируемых и неориентируемых поверхностей (компактных связных 2-многообразий), включая поверхности с краем. Что касается функциональных пространств и пространств последовательностей, то они излагаются в курсе функционального анализа.

В связи с ограниченностью учебного времени поставленный вопрос достаточно сложно решить оптимально. На наш взгляд, необходимо продолжить экспериментальную работу в направлении выделения минимума модельных пространств и составления на их основе законченных циклов учебных задач, упражнений и вопросов, по сути дела – минимальных результатов обучения. Итогом должно стать внедрение последних в практику преподавания топологии. Реализация этого плана, вписывающегося в рамки блочно-модульного подхода к организации учебного курса, несомненно, сделает преподавание более четким, а саму дисциплину – более понятной студентам.