УДК 517.984

Ю.Г.ИВАНОВ

ТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА И СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРА ЧЕЗАРО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ c_0

Настоящая работа посвящена нахождению тонкой структуры спектра и различных существенных спектров *оператора Чезаро C*, задаваемого следующим образом:

$$Cx(n) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

на банаховом пространстве сходящихся к нулю последовательностей c_0. Оператор C (1) задаёт классический метод суммирований по Чезаро или метод суммирования по Гёльдеру порядка 1.

В статье [1] вычислена тонкая структура спектра дискретного оператора Чезаро в пространстве c сходящихся последовательностей при помощи диаграммы состояний Тейлора-Халберга. В [2] вычислена структура существенных спектров оператора Чезаро в различных банаховых пространствах, в том числе дискретного оператора Чезаро на пространстве l_p, $l < p \le \infty$. Настоящая работа использует соответствующую методику вышеуказанных работ для нахождения тонкой структуры спектра и существенных спектров оператора (1) в пространстве $c_0 \subset c$.

Для замкнутого линейного оператора T на комплексном банаховом пространстве X существенные спектры определяются как дополнения в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ множеств, задаваемых фредгольмовыми свойствами оператора T-λI:

$$\sigma_{ek}(T) := \mathbf{C} \setminus \Delta_k(T)\,,\ \ k = 1, 2, 3, 4, 5\,,$$

$$\sigma_{e2}^{+}(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^{+}(T) \text{ и } \sigma_{e2}^{-}(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^{-}(T)\ ;$$

где $\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathbf{C}: \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I)\}$, $\Phi^{+}(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T):$

$\mathrm{nul}(T-\lambda I) < \infty\}$, $\Phi^{-}(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T): \mathrm{def}(T-\lambda I) < \infty\}$,

$\Delta_2(T) := \Phi^{+}(T) \bigcup \Phi^{-}(T) = s - \Phi(T)$, $\Delta_3(T) := \Phi^{+}(T) \bigcap \Phi^{-}(T) = \Phi(T)$,

$\Delta_4(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T): \mathrm{ind}(T-\lambda I) = 0\} = \Phi_0(T)$, $\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T):$ проколотая окрестность λ находится в резольвентном множестве $\rho(T)$ оператора $T\}$.

Каждое из множеств $\sigma_{ek}(T)$, $k = \overline{1,5}$ и $\sigma_{e2}^{\pm}(T)$ называется *существенным спектром*. По поводу обозначений и свойств см., например, работу [3]. Отметим только, что $\mathrm{nul}(T) := \dim \mathrm{N}(T)$, $\mathrm{def}\,(T) := \mathrm{codim}\,\mathrm{R}(T) = \dim \mathrm{X} / \mathrm{R}(T)$, $\mathrm{ind}(T) := \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}\,(T)$.

Для описания спектра и существенных спектров степеней оператора Чезаро можно воспользоваться тонкой структурой спектра, которая определяется при помощи таблицы состояний Тейлора-Халберга [4]. Эта таблица позволяет судить о свойствах области значений и свойствах обратимости как отображения на область значений одного из операторов T или его сопряжённого T', если сделаны некоторые предположения об области значения и обратимости другого оператора. Если T – ограниченный на X оператор, то по отношению к области значений $R(T)$ имеются три возможности: I. $R(T) = X$; II. $\overline{R(T)} = X$, но $R(T) \ne X$; III. $\overline{R(T)} \ne X$. Будем считать, что существование обратного оператора T^{-1} означает, что T взаимно однозначно отображает X на $R(T)$. По отношению к T^{-1} также имеется три возможности: 1. T^{-1} существует и непрерывен ; 2. T^{-1} существует и не является непрерывным; 3. T^{-1} не существует. Комбинируя эти возможности для оператора T, получим девять условий. Например, если $\overline{R(T)} \neq X$ и T^{-1} существует и непрерывен, то говорят, что оператор T находится в *состоянии* III_1 и записывают этот факт в виде $T \in III_1$. Если рассмотреть упорядоченную пару операторов (T, T'), где T' – сопряжённый оператор, то условия, накладываемые на каждый из операторов по отдельности дают упорядоченную пару условий, которую называют *состоянием пары*. Таким образом, существует восемьдесят одно потенциальное состояние пары операторов. В действительности, как показано в работе [4], на основании общих теорем о линейном ограниченном операторе, для вообще говоря нерефлексивного пространства X, возможными оказываются лишь девять следующих состояний для пары операторов (T, T'): (I_1, I_1), (I_3, III_1), (II_2, II_2), (II_2, III_2), (II_3, III_2), (III_1, I_3), (III_2, II_3), (III_2, III_3), (III_3, III_3) – что подтверждается различными примерами конкретных операторов в соответствующих пространствах, а остальные состояния при указанных условиях в принципе невозможны. Теперь возьмём в качестве оператора T оператор $C-\lambda I$, где C – произвольный ограниченный оператор на некотором банаховом пространстве X. Из определения резольвентного множества ясно, что такие λ, при которых состояние оператора $C-\lambda I$ есть I_1, будут принадлежать резольвенте оператора C. В остальных случаях состояние оператора будет определять *тонкую структуру спектра*. Так, например, спектральное подмножество II_2 из тонкой структуры спектра оператора C – это подмножество спектра $\sigma(C)$ вида $II_2\,\sigma(C) := \{\lambda \in \sigma(C) : C-\lambda I \in II_2\}$.

Перейдём непосредственно к вычислению структуры спектра дискретного оператора Чезаро C, действующего на пространстве c_0. Матрица оператора (1) имеет вид: $C = (a_{nk})$, где $a_{nk} = \dfrac{1}{n+1}$ при $k \leqslant n$, и $a_{nk} = 0$ при остальных k. Следовательно, матрицей оператора $C - \lambda I$ будет матрица (c_{nk}), где $c_{nk} = \dfrac{1}{n+1}$ при $k \leqslant n$, $c_{nk} = \dfrac{1}{n+1} - \lambda$ при $k = n$ и $c_{nk} = 0$ при остальных k. Оператор C', сопряжённый к C, определён на пространстве l_1 и задаётся матрицей, транспонированной к C.

Лемма 1. *Если λ таково, что $Re\dfrac{1}{\lambda} < 1$, то λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(C)$ оператора C.*

Доказательство: Поскольку $\lambda \neq \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$, матрица оператора $C - \lambda I$ будет нижняя треугольная и отображение – взаимно однозначное, следовательно, $C - \lambda I \in 1 \cup 2$. Далее, для $\forall y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in c_0$ находим такое $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, что $(C - \lambda I)x = y$. При этом получается матрица преобразования $A = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = \frac{1}{\dfrac{1}{n+1} - \lambda} \qquad \text{при } k = n\,;$$

$$a_{nk} = \frac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)(\frac{1}{n+1}-\lambda)\ldots(\frac{1}{k+1}-\lambda)}$$ при $k<n$ и $a_{nk}=0$ при остальных k. Проводя вычисления, аналогичные проделанным в [1], находим, что $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$, а также $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$, что достаточно для того, чтобы A переводил c_0 в c_0, т.е. $(C-\lambda I)\in I$. Согласно таблице состояний Тейлора-Халберга, получаем, что для λ, определённых в условии леммы, $(C-\lambda I)\in I_1$, т.е. $\lambda\in\rho(C)$.

Лемма 2. *Если для λ выполняется неравенство $Re\frac{1}{\lambda}>1$, то справедливы следующие включения: $\lambda\in III_1\sigma(C)$, $\lambda\in\Delta_3(C)$, т.е. $C-\lambda I$ – оператор Фредгольма с числовыми характеристиками def$(C-\lambda I)=1$, ind$(C-\lambda I)=-1$.*

Доказательство: Пусть $\lambda\neq\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$. Тогда опять имеем взаимно однозначное отображение и $C-\lambda I\in 1\cup 2$. Рассмотрим сопряжённый оператор $C'-\lambda I$. Его ядро состоит из векторов вида

$$x=(t,\ \frac{\lambda-1}{\lambda}t,\ldots,\binom{\frac{1}{\lambda}-1}{n}(-1)^n\ t,\ldots),\ t\in\mathbf{C}. \qquad (2)$$

Из того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{\lambda}-1}{n}$ сходится абсолютно для указанных λ, следует, что $x\in l_1$, а это означает, что $C'-\lambda I\in 3$, nul $(C'-\lambda I)=1$. Далее, находя для $\forall y\in l_1$ такое x, что $(C'-\lambda I)x=y$, получаем матрицу преобразования $B=(b_{nk})$, где:

$$b_{10}=\frac{1}{\lambda};\ b_{n0}=\frac{1}{\lambda}\prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p\lambda}\right)\ \text{при } n>1;$$

$$b_{nk}=\frac{1}{(k+1)\lambda^2}\prod_{p=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{(n+k+1-p)\lambda}\right)\ \text{при } 0<k<\ n-1;\ b_{nk}=\frac{1}{n\lambda^2}$$

при $k=n-1$; $b_{nk}=-\frac{1}{\lambda}$ при $k=n>1$; $b_{nk}=0$ при $k>n$ и при $k=n=0$.

Для этой матрицы $\sup_k\sum_{n=0}^{\infty}|b_{nk}|\leq \mathrm{M}<\infty$. Пусть теперь $\lambda=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$. Ядро оператора $(C-\lambda I)$ в пространстве c_0 состоит из нулевого вектора и поэтому $(C-\lambda I)\in 1\cup 2$. Решая однородное уравнение для сопряжённого оператора $(C'-\lambda I)\ x=0$, получим для $\lambda=1/p$ систему $p-1$ уравнений с p неизвестными, которая, как известно, имеет нетривиальные решения, причем размерность пространства решений равна 1, т.е. nul $(C'-\lambda I)=1$. Перейдя к решению неоднородного уравнения (C' – λI) x = y, получим матрицу G = =(g_{nk}), такую, что x = Gy, и для элементов которой также справедливо неравенство $\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |g_{nk}| \le M < \infty$. Известно, что выполнение этого неравенства гарантирует принадлежность x к l_1, т.е. область значений $R(C' - \lambda I) = l_1$ и поэтому замкнута, а следовательно, (C' – λI) $\in$ I_3 для указанных λ. Пользуясь таблицей состояний, получаем первое утверждение леммы. Кроме того, на основании теоремы IV.5.13 Като [5], заключаем, что область значений $R(C - \lambda I)$ замкнута и def ($C - \lambda I$) = nul (C' – λI) = 1, а учитывая, что nul (C – –λI) = 0, имеем:

$$\text{ind}\,(C - \lambda I) = -1.$$

Лемма 3. *Если* $\lambda = 0$, либо $Re\frac{1}{\lambda} = 1$, $\lambda \ne 1$, то $\lambda \in II_2\sigma(C)$, $\lambda \notin \Delta_l(C)$, *т.е. (С – λI) не является нормально разрешимым для таких* λ.

Доказательство: Очевидно, что матрица оператора нижняя треугольная и отображение – взаимно однозначное, следовательно, $C - \lambda I \in 1 \cup 2$. Для сопряжённого оператора уравнение, (C' – λI)x = 0 имеет корни вида (2) для случая $Re\frac{1}{\lambda} = 1, \lambda \ne 1$ и $x = 0$, для обоих случаев. Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = t \sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{\lambda}-1}{n} \right|$ расходится для таких λ, что $Re\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = 0$, делаем вывод, что ($C'$ – λI)$\in 1 \cup 2$. Согласно таблице состояний, $C - \lambda I \in II_2$, а это влечёт за собой незамкнутость области значений оператора, т.е. $\lambda \notin \Delta_l(C)$.

Лемма 4. *Если* $\lambda = 1$, то $\lambda \in III_2\sigma(C)$, $\lambda \notin \Delta_l(C)$, *т.е. (С – λI) не является нормально разрешимым для таких* λ.

Доказательство: Решением однородного уравнения ($C - I$)x = 0 являются вектора вида x = (t, t, t,..., t,...), из которых лишь нулевой принадлежит c_0, поэтому опять имеем: ($C - \lambda I$)$\in 1 \cup 2$. Пусть $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in c_0$, $y_0 \ne 0$, тогда $\forall x \in c_0$: $\|y - (C - I)x\| \ge |y_0| > \frac{|y_0|}{2}$, откуда следует, что $y \notin \overline{R(C - I)}$, что в свою очередь влечёт $\overline{R(C - I)} \ne c_0$, т.е. ($C - I$) $\in III$ и, согласно таблице состояний, ($C - I$) $\in III_1 \cup III_2$. По лемме 1, $\{\lambda \in \mathbf{C} : Re\frac{1}{\lambda} < 1\} \subset \rho(C)$, согласно лемме 2, $\{\lambda \in \mathbf{C} : Re\frac{1}{\lambda} > 1\} \subset \Phi(C)$ и ind($C - \lambda I$)$\ne 0$. Поэтому, из первой теоремы устойчивости для полуфредгольмовых операторов, учитывая, что nul ($C - I$) < ∞, следует $1 \notin \Delta_1(C)$, что означает незамкнутость области значений ($C - I$). А это, в свою очередь, влечёт незамкнутость области значений (C' – I), т.е. (C' – I) $\in III \cup II$. Пользуясь таблицей состояний Тейлора-Халберга, получаем нужное включение ($C - I$)$\in III_2$.

Из лемм 1 – 4 непосредственно следует следующее утверждение о тонкой структуре оператора Чезаро:

Теорема 1. *Для тонкой структуры спектра оператора Чезаро в пространстве* c_0 *выполняются следующие включения:*

$$II_2\sigma(C) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \} \setminus \{1\};$$

$$III_1\,\sigma(C) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \};\ III_2\sigma(C) = \{1\}.$$

Если рассуждения, касающиеся вычисления существенного спектра, применить к результатам вычисления тонкой структуры спектра из работы [1], получим утверждение следующей леммы.

Лемма 5. *Для дискретного оператора Чезаро, действующего на пространстве c, справедливы следующие утверждения:*

1. Если $Re\frac{1}{\lambda} > 1$ *, то* $\lambda \in \Delta_3(C)$*,т.е. C –* λI *– оператор Фредгольма,* $ind(C - \lambda I) = -1$.

2. Если $\lambda = 0$*, либо* $Re\frac{1}{\lambda} = 1$ *, то* $\lambda \notin \Delta_1(C)$*, т. е. (C –* λI*) не является нормально разрешимым для таких* λ.

Основной результат о существенных спектрах оператора Чезаро содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. *Для существенных спектров дискретного оператора Чезаро, действующего на банаховых пространствах* c_0*, c, выполняются равенства:*

$$\sigma_{e1}(C) = \sigma_{e2}(C) = \sigma_{e2}^{\pm}(C) = \sigma_{e3}(C) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \};$$

$$\sigma_{e4}(C) = \sigma_{e5}(C) = \sigma(C) = \{ \lambda \in \mathbf{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \le \frac{1}{2} \}.$$

Доказательство теоремы следует из определения существенных спектров и рассмотренных выше утверждений лемм 1 – 5.

Заметим, что существенные спектры операторов Чезаро, действующих на пространствах c_0, c, l_∞ совпадают, а тонкая структура спектра этих операторов различна.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Robert B. Wenger*** // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1975. – V. 6. – №6. – P. 695–712.
2. ***Еровенко В.А.*** Докл. АН БССР. – 1987. – Т. 31. – №9. – С. 784–787.
3. ***Еровенко В.А.*** Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32. – №8. – С. 1024–1034.
4. ***Тейлор А.Э., Халберг Ч.Дж.*** // Математика: Сб. переводов. – 1959. – Т.3. – №1. – С. 79–89.
5. ***Като Т.*** Теория возмущений линейных операторов. – М.,1972.