УДК 514.765

О.В. ДАШЕВИЧ

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВ С КАНОНИЧЕСКОЙ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРОЙ

Введение

Изучение инвариантных структур классического типа (почти произведения *P*, почти комплексной *J* и *f*-структуры) на однородном пространстве *G/H* позволяет дать богатую информацию о геометрии пространства. Открытие таких структур на регулярных Ф-пространствах [1] послужило толчком к волне интересных исследований в теории однородных пространств. Характерной особенностью таких структур, называемых каноническими [2], является то, что они строятся по автоморфизму Ф группы Ли *G* при отсутствии каких-либо ограничений на саму группу *G* (полупростота, компактность).

Пусть Ф – аналитический автоморфизм связной группы Ли *G*, *H* – ее замкнутая подгруппа, удовлетворяющая условию $G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi$, где G_0^Φ – связная компонента единицы подгруппы G^Φ неподвижных точек автоморфизма Ф. Однородное пространство *G/H* называют *однородным Ф-пространством* [1], [2] (обобщенным симметрическим пространством [3]). Ф-пространство *G/H* называют *периодическим* порядка n, если существует натуральное число n > 1 такое, что $\Phi^n = \mathrm{id}$, причем n – наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Обозначим дифференциал автоморфизма Ф в точке *e* через φ: $\varphi = d\Phi_e$ и рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы *G* линейный оператор $A_\varphi = \varphi - id$. Разложение Фиттинга алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующее A_φ, есть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, где через $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ обозначены 0-компонента и 1-компонента соответственно. Однородное Ф-пространство *G/H* будет называться *регулярным Ф-пространством* [1], если $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли группы Ли *H*. Как показано в [1], всякое периодическое однородное Ф-пространство является регулярным Ф-пространством. Известно также [1], что регулярное Ф-пространство *G/H* является однородным редуктивным пространством, и *каноническое редуктивное разложение* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}.$$

Обозначим через θ ограничение φ на подпространство $\mathfrak{m}$, отождествленное с касательным пространством к *G/H* в точке p_0 = *H*. Напомним, что инвариантная аффинорная структура *F* на регулярном Ф-пространстве *G/H* называется *канонической* [2], если аффинор F_0 в точке p_0 является полиномом от θ. В [2] был поставлен и успешно решен вопрос о существовании на регулярных Ф-пространствах канонических инвариантных аффинорных структур следующих типов – *почти произведения, почти комплексных* и *f-структур*. Помимо указания числа таких структур были получены алгоритмы их вычисления, а для периодических однородных Ф-пространств указаны точные вычислительные формулы. При этом для однородного Ф-пространства

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

порядка 3 было установлено, что оно допускает единственную каноническую аффинорную структуру, а именно, почти комплексную, ранее хорошо исследованную в [4]. Однородное Ф-пространство порядка 4 допускает две канонических структуры – почти произведения и *f*-структуру, а однородное Ф-пространство порядка 5 помимо канонической структуры почти произведения обладает двумя каноническими почти комплексными структурами и имеет две канонических *f*-структуры.

Рассмотрим теперь регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру *J*, оператор которой на $\mathfrak{m}$ обозначим через *J*. Известным примером такого пространства является однородное Ф-пространство порядка 3 [4], каноническая почти комплексная структура на котором обладает следующей особенностью: на этом пространстве только каноническая связность 2-го рода является почти комплексной связностью (т.е. $\nabla J = 0$), инвариантной относительно действий группы *G* и диффеоморфизма *D*, определяемого формулой:

$$D: G/H \to G/H: xH \to \Phi(x)H.$$

В [5] обнаружено, что на однородном Ф-пространстве *G/H* порядка 4, допускающем каноническую *f*-структуру, также не существует других инвариантных относительно *G* и *D* связностей, согласованных с *f*-структурой, кроме канонической связности 2-го рода. Однородное Ф-пространство порядка 5 с каноническими структурами почти произведения *P* и почти комплексной *J* тоже допускает лишь одну инвариантную относительно *G* и *D* почти комплексную связность, согласованную одновременно с *P*, и этой связностью является именно каноническая связность 2-го рода [6], [7].

В своей работе [8] указанные результаты были обобщены автором на случай произвольного регулярного Ф-пространства, не обязательно периодического. В частности, были найдены условия интегрируемости канонической структуры *J* на произвольном регулярном Ф-пространстве *G/H*, допускающем единственную инвариантную относительно *G* и *D* почти комплексную связность. В данной заметке получены результаты, показывающие, какие соотношения накладываются на тензоры кривизны инвариантных аффинных связностей при таком ограничении, связь выполнения этих соотношений с интегрируемостью структуры *J*.

1. Тождества кривизны для регулярных Ф-пространств

Обозначим через $X_{\mathfrak{h}}$ и $X_{\mathfrak{m}}$ проекции вектора *X* на пространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$. Вспомним (см. [9], с. 138), что для тензора кривизны *R* почти комплексной аффинной связности ∇ на почти комплексном многообразии M справедливо равенство $R(X, Y)J = JR(X, Y)$, где *X* и *Y* – любые векторные поля из M. Для регулярных Ф-пространств с единственной почти комплексной связностью результат получается несколько неожиданным, как показывает следующая

Теорема 1. *Пусть G/H – регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть далее на G/H каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью структуры J, инвариантной относительно G и D. Тогда тензор кривизны R произвольной инвариантной относительно G и D аффинной связности* ∇ *с функцией Номидзу* α *удовлетворяет следующим тождествам:*

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

$$R(X, Y)\,J_0 Z - J_0 R(X, Y)\,Z = 2\,J_0\,\alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z), \qquad (1)$$

$$J_0\,(R(X, Y) + R(J_0 X, J_0 Y)) = (R(X, Y) + R(J_0 X, J_0 Y))\,J_0 \qquad (2)$$

для всех X, Y и Z из $\mathfrak{m}$.

Доказательство. Как следует из [8], при выполнении условий теоремы для функции Номидзу α произвольной инвариантной на G/H связности ∇ справедливо:

$$\alpha\,(X, Y) = J_0\,\alpha\,(X, J_0 Y), \qquad X, Y \in \mathfrak{m}. \qquad (3)$$

Кроме того, тогда на G/H для всех X, $Y \in \mathfrak{m}$ имеет место равенство [8]

$$J_0\,[X, Y]_{\mathfrak{m}} = -\,[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, \qquad (4)$$

которое влечет

$$[X, Y]_{\mathfrak{m}} = -\,[J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} \qquad (5)$$

и

$$[J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}. \qquad (6)$$

Напомним [10], что на редуктивном пространстве G/H тензор кривизны аффинной связности ∇ с функцией Номидзу α определяется выражением

$$R(X, Y)\,Z = \alpha\,(X, \alpha\,(Y, Z)) - \alpha\,(Y, \alpha\,(X, Z)) -$$

$$-\,\alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) - [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z],\ X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

Тогда, учитывая (3) и (5), получаем для любых X, Y, $Z \in \mathfrak{m}$

$$R(X, Y)\,J_0 Z = \alpha\,(X, \alpha\,(Y, J_0 Z)) - \alpha\,(Y, \alpha\,(X, J_0 Z)) - \alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 Z) -$$

$$-\,[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, J_0 Z] = J_0\,\alpha\,(X, \alpha\,(Y, Z)) - J_0\,\alpha\,(Y, \alpha\,(X, Z)) +$$

$$+\,J_0\,\alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) - [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, J_0 Z].$$

Так как $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ инвариантны относительно φ и G/H редуктивно, то $\theta\,[A, X] = [A, \theta X]$, где $A \in \mathfrak{h}$ и $X \in \mathfrak{m}$. Отсюда и из определения J_0 получаем $J_0\,[A, X] = [A, J_0 X]$ и легко приходим к тождеству (1).

Преобразуем теперь тождество (1), применив к его левой и правой частям оператор J_0. Получим $J_0 R(X, Y)\,J_0 Z + R(X, Y)\,Z = -\,2\,\alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z)$. Заменив векторы X, Y и Z на векторы $J_0 X$, $J_0 Y$ и $J_0 Z$ соответственно и используя (3) и (5), придем к равенству

$$-\,J_0 R(J_0 X, J_0 Y)\,Z + R(J_0 X, J_0 Y)\,J_0 Z = -\,2\,J_0\,\alpha\,([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z).$$

Следовательно, $R(J_0 X, J_0 Y)\,J_0 Z - J_0 R(J_0 X, J_0 Y)\,Z = J_0 R(X, Y)\,Z - R(X, Y)\,J_0 Z$, откуда немедленно следует тождество (2).

Из (1) в силу произвольности выбора векторов X, Y и Z получаем

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Следствие. *Пусть G/H – регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть далее на G/H каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью, инвариантной относительно G и D. Если G/H является локально симметрическим пространством (т.е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$), то оператор J_0 на $\mathfrak{m}$ коммутирует с оператором кривизны $R(X, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{m}$ любой инвариантной относительно G и D аффинной связности на G/H.*

2. Тождества кривизны и порядок однородного Ф-пространства

В работах [4] и [11] показано, что на однородном Ф-пространстве порядка 3 наряду с (4) для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполняется и равенство

$$[J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}} \qquad . \qquad (7)$$

Рассмотрим условия выполнения этого равенства в случае, когда G/H является произвольным регулярным Ф-пространством с единственной инвариантной почти комплексной связностью. Оказывается, их можно описать, используя тензоры кривизны некоторых инвариантных относительно G и D связностей на G/H. Сначала будет доказана

Лемма. *Пусть G/H – регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть на G/H каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью, инвариантной относительно G и D. Если произвольная инвариантная относительно G и D аффинная связность ∇ удовлетворяет любому из условий*

а) функция Номидзу α связности ∇ является кососимметрической биллинейной функцией на $\mathfrak{m}$;

б) тензор кручения связности ∇ $T(X, Y) = c[X, Y]_{\mathfrak{m}}$, где c – произвольное действительное число,

то для ее функции Номидзу справедливо:

$$\alpha(J_0 X, Y) = \alpha(X, J_0 Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m}. \qquad (8)$$

Доказательство. При выполнении условия а) справедливость (8) следует немедленно из (3). Пусть теперь связность ∇ удовлетворяет условию б). Тогда ее функция Номидзу α удовлетворяет равенству [10] $\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - [X, Y]_{\mathfrak{m}} = c[X, Y]_{\mathfrak{m}}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) = (c+1)[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ и $J_0\alpha(X, Y) - J_0\alpha(Y, X) = (c+1)J_0[X, Y]_{\mathfrak{m}}$, что приводит к равенству

$$-\alpha(X, J_0 Y) + \alpha(Y, J_0 X) = -(c+1)[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}. \qquad (8)$$

Но $T(J_0 X, Y) = \alpha(J_0 X, Y) - \alpha(Y, J_0 X) - [J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}} = c[J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}}$, откуда

$\alpha(J_0 X, Y) - \alpha(Y, J_0 X) = (c+1)[J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Вспомнив (6) и сравнив последнее равенство с (9), приходим к справедливости (8).

Предложение 1. *Пусть G/H – регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью на G/H, инвариантной относительно G и D. Если произвольная инвариантная относительно G и D аффинная связность ∇ с функцией*

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Номидзу α удовлетворяет любому из условий а), б) Леммы, то для тензора кривизны R связности ∇ одновременно с равенством (7) выполняется следующее равенство:

$$R\,(J_0X,\,J_0Y)\,Z - R\,(X,\,Y)\,Z = 2\,\alpha\,([X,\,Y]_{\mathfrak{m}},\,Z), \tag{10}$$

где X, Y и Z – любые векторы из $\mathfrak{m}$.

Доказательство. Воспользовавшись (3), (5) и (8), находим, что

$$R\,(J_0X,\,J_0Y)\,Z = \alpha\,(J_0X,\,\alpha\,(J_0Y,\,Z)) - \alpha\,(J_0Y,\,\alpha\,(J_0X,\,Z)) -$$

$$-\,\alpha\,([J_0X,\,J_0Y]_{\mathfrak{m}},\,Z) - [[J_0X,\,J_0Y]_{\mathfrak{h}},\,Z] = \alpha\,(X,\,\alpha\,(Y,\,Z)) -$$

$$-\,\alpha\,(Y,\,\alpha\,(X,\,Z)) + \alpha\,([X,\,Y]_{\mathfrak{m}},\,Z) - [[J_0X,\,J_0Y]_{\mathfrak{h}},\,Z].$$

Следовательно,

$$R\,(J_0X,\,J_0Y)\,Z = R\,(X,\,Y)\,Z + 2\alpha\,([X,\,Y]_{\mathfrak{m}},\,Z) -$$

$$-\,[[J_0X,\,J_0Y]_{\mathfrak{h}},\,Z] + [[X,\,Y]_{\mathfrak{h}},\,Z],$$

откуда следует справедливость утверждения предложения.

Равенства (4) и (7) играют особую роль в теории однородных Ф-пространств порядка 3. Их выполнение для всех X, Y из $\mathfrak{m}$ на произвольном редуктивном пространстве G/H позволяет рассматривать G/H как однородное Ф–пространство порядка 3 в случае, когда G является односвязной группой Ли [11]. Обратно, как мы уже отметили, на однородном Ф-пространстве G/H порядка 3 равенства (4) и (7) выполняются. Эти рассуждения позволяют нам теперь сформулировать следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть G/H – регулярное Ф-пространство с односвязной группой Ли G, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. G/H будет являться однородным Ф-пространством порядка 3 тогда и только тогда, когда каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной аффинной связностью на G/H, инвариантной относительно G и D, и для тензора кривизны R произвольной инвариантной относительно G и D аффинной связности ∇, удовлетворяющей любому из условий а), б) Леммы, выполняется равенство (10).*

Доказательство. Как уже упоминалось выше, на однородном Ф-пространстве G/H порядка 3 каноническая связность 2-го рода является единственной почти комплексной связностью, инвариантной относительно G и D, и на G/H для всех X, $Y \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство (7). Из предложения 1 теперь получаем, что для тензора кривизны $R\,(X,\,Y)$, инвариантной относительно G и D связности ∇, удовлетворяющей любому из условий а), б) Леммы выполняется равенство (10).

Обратно, если регулярное Ф-пространство G/H с канонической почти комплексной структурой J не имеет других инвариантных относительно G и D почти комплексных связностей, кроме канонической связности 2-го рода, то на нем выполняется равенство (4). В силу выполнения на G/H равенства (10) на нем выполняется также и (7). Тогда, как показано в [4], [11], можно построить автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ порядка 3. Так как группа Ли G односвязна, он определяет автоморфизм Ф порядка 3 группы G, и подгруппа H содержится в подгруппе G^{Φ} неподвижных точек автоморфизма Ф.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Степанов Н.А.*** *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
2. ***Балащенко В.В., Степанов Н.А.*** *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах* // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
3. ***Ковальский О.*** *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984.
4. ***Степанов Н.А.*** *Однородные 3-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.
5. ***Балащенко В.В., Дашевич О.В.*** *Геометрия канонических структур на однородных Ф-пространствах порядка 4* // Успехи матем. наук. – 1994. – Т.49. – Вып.4. – С.153–154.
6. ***Балащенко В.В., Чурбанов Ю.Д.*** *Инвариантные структуры на однородных Ф-пространствах порядка 5* // Успехи матем. наук. – 1990. – Т.45. – Вып.1. – С.169–170.
7. ***Чурбанов Ю.Д.*** *О некоторых классах однородных Ф-пространств порядка 5* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 88–90.
8. ***Дашевич О.В.*** *Канонические структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах и инвариантные аффинные связности* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 23–31.
9. ***Кобаяси Ш., Номидзу К.*** *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.
10. ***Nomizu K.*** *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. J. Math. – 1954. – V.76. – № 1. – P. 33–65.
11. ***Wolf J., Gray A.*** *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms* // J. Diff. Geometry. – 1968. – V.2. – № 1-2. P. 77–114, 115–159.