УДК 51:1

Н.В. МИХАЙЛОВА

ФЕНОМЕН БЕСКОНЕЧНОГО В МНОГООБРАЗИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

В каждой мимолетности вижу я миры
Полные изменчивой, радужной игры.
Константин Бальмонт

Современное математическое образование – это сложная система с большим числом не всегда ясно осознаваемых параметров. Поэтому вполне естественно появление непредвиденных возможностей потери его устойчивости. Реальность такой ситуации косвенно подтверждается *«принципом хрупкости хорошего»*, сформулированным академиком В.И. Арнольдом в «Теории катастроф». Основной смысл этого принципа состоит в том, что любая система может считаться хорошей, пока она удовлетворяет некоторому набору требований, но должна быть признана плохой, если не выполняется хотя бы одно из них. В частности, устойчивость качества хорошего математического образования более хрупка, чем плохого образования. Сложность современного мира вынуждает образование становиться более инициативным, а не только привычно обучающим. Такая ситуация предполагает философское осмысление новых целей и задач математического образования всех уровней, что невозможно без соответствующего анализа эволюции самого математического знания.

Одна из важнейших методологических задач математики состоит в описании мира не только с точки зрения открытых в нем законов, но и с точки зрения законов, которые могут в нем установиться. Поэтому математика, как язык науки, способна специфически оформлять высказывания как о законах мира действительного, так и законах возможных миров. Известный способ "приручения" бесконечности связан с использованием особого символьного языка, позволяющего вводить математические абстракции. Работать с бесконечностью позволяет аппаратно-понятийная математическая форма, ограничивающая содержание и превращающая бесконечность в конечное. Абстракции и являются той формой, в которой происходит "кодирование" бесконечности. Математика не сводится к совокупности вычислительных приемов, и вовсе не алгоритмический и вычислительный аппарат позволяет рассматривать ее как образец научности. В определенной степени элементами идеала можно считать доказательность математических утверждений и способы построения ее теорий. Математизируемые науки становятся более абстрактными, чем они были до математизации. Проблема бесконечного или *феномен бесконечного* заключается в том, что исследователь рано или поздно сталкивается с "проблемами", мешающими его успешной работе. Следует ли избегать в математике слова "бесконечное"? "Да, там, – отвечает влиятельный философ Людвиг Витгенштейн (1889-1951), – где кажется, будто это слово придает исчислению значение, вместо того, чтобы, наоборот, получать значение от исчисления".

Для математиков бесконечное есть специфический элемент математического метода или *метафора конечного*, поскольку при изучении бесконечное заменяется множественным числом конечного. С помощью метафор мифы используются в художественных и научных целях. Современный философ Мераб Мамардашвили (1930-1990) обращает внимание на фразу французского этнографа Клода Леви-Стросса о том, что "в каком-то смысле не люди мыслят мифами, а мифы мыслят сами через людей". "Много "интересного" выпадает в осадок из испарений народной мифологии и магии, – замечает Мамардашвили, – в том числе определенное представление о знании, отношении к нему как положительному ... Это вполне таинственная сила знания и умений ..." [1, с. 27]. Бесконечное как метафора конечного может быть насыщено богатым содержанием в зависимости от уровня воображения и изощренности сознания. Один из выдающихся математиков первой половины XX века Герман Вейль (1885-1955) сказал: "Величие математики я усматриваю именно в том, что почти во всех ее теоремах, в силу самой ее сущности, всякий *вопрос о бесконечности решается на уровне конечного*" [2, с. 127]. В философии бесконечное предстает как слишком разветвленное семейство образов, чтобы их все можно было связать с метафорами конечного. Бесконечное и конечное в философии рассматриваются и как две противоположности, исключающие что-либо третье. Великий немецкий математик Давид Гильберт (1862-1943), творчество которого охватывало по существу всю математику, считал, что *"бесконечное нигде не реализуется, его нет в природе"*, поэтому проблема бесконечности – это проблема, собственно, теоретической науки, а в первую очередь, философии и математики.

Профессиональные математики постоянно ощущают бесконечность в основных структурах, формах и символах своей науки, но выразить ее исчерпывающе и рассудочно с помощью только логики, вообще говоря, не могут. Помимо математики бесконечное чаще всего проявляется в таких областях человеческой деятельности как философия и религия. Говоря о *"божественной среде человеческого усилия"*, Мераб Мамардашвили предполагал, что есть какой-то другой, реально существующий, особый мир, "мир особых сущностей", который существует так же, как предметы существуют, только это будто бы другого рода предметы и сущности. Но этот мир никогда не совпадает с "параллельной плоскостью" нашей жизни. Известный математик и философ В.В. Налимов (1910-1997) обращал внимание на то, что имя самого Бога бесконечно. Для Германа Вейля "Бог – это источник гармонии мира, а наука, особенно математика, – путь к ее раскрытию". Современная математика отражает в конечных символах посредством знакового конструирования идеи, которые для Бога суть *"непосредственная данность бесконечности"* [2, с. 358].

Поэтому религиозное видение мира, согласно Вейлю, необходимо для понимания идеи бесконечности, без которой нет математики. "В отличие от Декарта, – отмечает профессор Московского университета Г.Я. Стрельцова, – у которого лишь Бог поистине бесконечен (infini), тогда как природа лишь безгранична, у Паскаля и Бог, и природа infini" [3, с. 129]. В наибольшей степени бесконечность ощущается в таких разделах математики, как геометрия, математический и функциональный анализ и, конечно, теория множеств, т.е. там, где присутствуют понятия размерности, сходимости, непрерывности и где важен их философский контекст.

Специфика бесконечномерного наглядно проявляется при рассмотрении подпространств и операторов. Например, в конечномерном евклидовом пространстве любое линейное многообразие замкнуто, а линейный оператор в нем непрерывен. Однако в бесконечномерных пространствах эти утверждения, вообще говоря, становятся неверными. В меньшей степени бесконечность проявляется в алгебраических построениях. Алгебраизация, как одна из ведущих тенденций развития математики, основы которой в XVII веке заложил Рене Декарт, отразила деятельный характер западной цивилизации, в духовной культуре которой преобладали дискретные процессы, что и выразилось в социальных и научных революциях. Созерцание, как геометрический способ мышления, сменилось деятельностью, в результате чего мы с трудом понимаем, как же все-таки был получен результат в многостраничном доказательстве. Любое творческое движение нашей мысли, порождающее нечто принципиально новое, в значительной мере основано на *абстракции необозримости*. "Построение системы классической физической науки, – считает М.К. Мамардашвили, – невозможно, например, без допущения гипотетически максимально мощного интеллекта, не ограниченного пространством и временем в свершении своих операций" [4, с. 31]. Доктор философских наук В.А. Карпунин полагает, что именно "фундаментальностью абстракции необозримости" для познавательных процессов объясняется, в частности, невозможность "уложить" человеческое мышление в жесткое ложе финитности и конструктивности. И все же именно в математике бесконечность была источником не только содержательной теоретической математики, но и стала, как говорил Герман Вейль, *музой-вдохновительницей и глубинным предметом самой математики*.

Творец теории множеств, немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) отмечал, что столь трудная и всеобъемлющая тема, как проблема бесконечности, была объектом самых различных мнений и толкований, но ни математики, ни философы не пришли здесь к полному согласию. Один из аргументов, выдвинутых Аристотелем против реальности бесконечного, состоит в том, что если бы оно существовало, то конечное было бы разрушено им, поскольку конечное число может поглощаться бесконечным числом. Историк математики доктор физико-математических наук Ф.А. Медведев обращает внимание на глубокую идею *неразрывной взаимосвязи конечности и бесконечности*. Так польский математик и логик Альфред Тарский (1902-1984), рассмотрев около десятка различных определений понятия конечного множества, пришел к выводу, что эквивалентность многих из них друг другу может быть установлена только с помощью аксиомы выбора – сравнительно спорного математического предположения вообще. "Далее, как оказалось впоследствии, может случиться, что множество, конечное в смысле одного определения, будет бесконечным в смысле другого. Так что, принимая понятие конечности (или бесконечности) за неопределяемое, а тем более отрывая конечность от бесконечности, математик оказывается в довольно сложном положении" [5, с. 90-91]. Еще

Блезу Паскалю с помощью "бесконечности в малом" удалось увидеть неразрывную связь основной онтологической противоположности – конечного и бесконечного, поскольку "любое конечное тело в природе, как бы мало оно ни было, оказывается внутренне бесконечным и до начала его дойти столь же невозможно, как и до начала и конца вселенной" [3, с. 132].

Для современной математики понятие бесконечности не просто существенно важно, но и является жизненно необходимым, так как большинство математических утверждений, не имеющих отношения к абстрактной бесконечности, можно, с точки зрения абстрактно-теоретического оснащения математики конца двадцатого века, считать тривиальными. С другой стороны, появление большого комплекса вычислительных наук в силу своей специфики должно учитывать финитность ресурсов вычислительной компьютерной техники, а это формирует естественное стремление к финитизации математики, что явно проглядывает у интуиционистов и конструктивистов. Представители разных направлений философии математики стараются избежать явных определений конечности и бесконечности, в отличие от попыток математиков конца XIX - начала XX веков. Хотя и на этом, и предшествующих этапах развития математики так и не были выработаны дефиниции конечности и бесконечности, удовлетворившие бы большинство ученого сообщества. Несмотря на обилие разнообразной литературы на эту тему, Ф.А. Медведев считает, что "вряд ли кто искренне убежден хотя бы в приблизительной понятности ситуации" с систематизацией и выяснением достоинств и недостатков различных подходов к понятиям конечности и бесконечности. Исследователи истории науки уделяют все еще недостаточное внимание тому, с каким видом конечности или бесконечности работает ученый, труды которого они изучают, не склонный к тому же уточнять свои соображения. Нельзя также не отметить, что с *проблемой конечности-бесконечности* связана не менее сложная и содержательная *проблема дискретности-непрерывности*.

Начиная с Аристотеля, математики проводили различие между *актуальной бесконечностью и потенциальной бесконечностью*, которые Кантор называет также *несобственной бесконечностью и собственной бесконечностью*. Обе они, в свою очередь, делятся на бесконечно большие и бесконечно малые, появившиеся с возникновением математического анализа. Кроме того, бесконечность может проявляться в форме величины, числа, множества и последовательности, на которые распространяются арифметические, геометрические, алгебраические и логические процедуры или правила действий. В рукописи Людвига Виттенштейна "Понятие "бесконечность" в математике" (1931) это положение разъясняется так: "Если вы говорите о понятии "бесконечность", то должны помнить, что это слово имеет много различных значений, и хорошо осознавать, о каком из них мы собираемся говорить в настоящий момент". Природа у Блеза Паскаля – это, нестрого говоря, "открытая, незавершенная", то есть потенциальная бесконечность, тогда как Бог – "завершенная и закрытая", то есть актуальная бесконечность [3, с. 129]. Мы имеем дело с актуальной бесконечностью, например, когда, по мнению Кантора, рассматриваем натуральный ряд так, как если бы все натуральные числа были даны нам одновременно, или когда рассматриваем функциональное пространство как бесконечное множество элементов-точек.

Понятие об актуальной бесконечности состоит в рассмотрении бесконечной совокупности математических объектов как завершенной совокупности, независимо от процесса построения этих объектов. Понятие о потенциальной бесконечности состоит в рассмотрении бесконечной совокупности математических объектов, исходя из процесса последовательного построения этих объектов. Идеализированным каноническим примером такого рода может служить бесконечность натурального ряда, рассматриваемого как процесс образования натуральных чисел, учитывая, что построение слишком больших натуральных чисел в реальных условиях невозможно. Счетные множества, например, натуральные или рациональные числа, допускают трактовку с соответствующими модификациями как в смысле актуальной бесконечности, так и в смысле потенциальной бесконечности, а несчетные множества, вообще говоря, только в смысле актуальной бесконечности. Принципиальная граница находится не между конечными и счетно-бесконечными множествами, а между счетными, как дискретными, и несчетными, как непрерывными, множествами. Заметим в связи с этим, что метод индукции по существу применим к счетным множествам и неприменим к несчетным. Характерным примером последнего является *континуум* (например, множество точек единичного отрезка или прямой). В отличие от счетных множеств, где точки или элементы этих множеств первичны по отношению к целому, для континуума первичным является целое множество. Поэтому выражение типа "непрерывный единичный отрезок состоит из точек" достаточно условно, поскольку лебеговская мера точки равна нулю, а указанного отрезка – единице.

В теории категории и теории меры для характеристики бесконечных, в определенном смысле, "малых" множеств используются, соответственно, понятия множества первой категории и множества меры нуль. Каждое счетное множество является множеством первой категории и лебеговской меры нуль, но и несчетное канторово множество обладает этими свойствами. *Понятие категории* активно используется математиками при доказательстве *теорем существования*. Американский математик профессор Джон Окстоби говорил, что в этом проявляется своеобразная *"телескопическая функция"* этого понятия. Теорема Бэра о категориях дает нам возможность обнаружить математические объекты, которые без нее было бы довольно трудно разглядеть. Феноменальный факт, говорящий о сложности понятия несчетного множества, состоит в том, что единичный отрезок и даже прямую можно разбить на два дополняющих друг друга множества, одно из которых первой категории, а второе меры нуль. Георг Кантор порвал с многовековой традицией, рассмотрев бесконечные множества как единые сущности, доступные человеческому разуму. Одним из его главных математических достижений было построение теории трансфинитных чисел для "оценки" количества элементов в актуально бесконечных множествах. "Все так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел, – пишет Г. Кантор, – являются ... ошибочными по существу ... в том, что в них заранее приписывают или скорее навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем, бесконечные числа ... ввиду своей противоположности конечным числам, должны образовывать совершенно новый вид чисел, свойства которых зависят исключительно от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола и наших предрассудков" [6, с. 263].

К концу XIX века возникла философия математики как самостоятельная дисциплина, основной проблемой которой стало логическое обоснование нашего мышления с бесконечными математическими объектами, в значительной мере в связи с парадоксами, открытыми в теории множеств и логике в начале XX века [7; 8]. Первоначальный смысл термина "бесконечность" был связан с тем, что любое определение является, вообще говоря, ограничением, т.е. *бесконечность – это то, что противостоит ограничительным процедурам*. "Как далеко ни уносило нас воображение за пределы видимого, скорее оно утомится, – говорит Паскаль, – чем истощится природа в творчестве новых форм" [3, с. 128] Поэтому никакая, даже самая могучая, мысль не в силах исчерпать эту естественную бесконечность.

В современной философии образования принято различать образование естественное, социально обусловленное общественными процессами, и «специально организованное» образовательной системой [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мамардашвили М.К.*** Неизбежность мысли // Человек. – 1999. – № 1. – С. 8-24; 1999. – № 2. – С. 20-41.
2. ***Вейль Г.*** Математическое мышление. – М: Наука, 1989. – 400 с.
3. ***Стрельцова Г.Я.*** Паскаль и европейская культура. – М.: Республика, 1994. – 495 с.
4. ***Мамардашвили М.К.*** Классический и неклассический идеалы рациональности. – Тбилиси: Мецниереба, 1984. – 82 с.
5. ***Медведев Ф.А.*** О конечности и бесконечности // Методологический анализ закономерностей развития математики. – М.: ВИНИТИ, 1989. – С. 86-96.
6. ***Кантор Г.*** О различных точках зрения на актуально бесконечное // Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – С. 262-268.
7. ***Михайлова Н.В.*** Философские взгляды Иммануила Канта на роль интуиции в научном познании // Великие преобразователи естествознания: Иммануил Кант. Мн.: БГУИР, 1999. – С. 40-42.
8. ***Еровенко В.А., Михайлова Н.В.*** Современная педагогическая континуум-гипотеза университетского математического образования // Адукацыя і выхаванне. – 1999. – № 12. – С. 7-13.
9. ***Еровенко В.А., Михайлова Н.В.*** Философия математического знания в контексте социокультурной динамики: универсальное счастье по Вергилию // Вышэйшая школа. – 1999. – № 1. – С. 19-24.
10. ***Гусинский Э.Н., Турчанинова Ю.И.*** Философия образования // Университетская книга. – 1998. – № 12. – С. 11-15.