УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КЛАССА $\mathfrak{X}(n)$

Значение классов $\mathfrak{X}(n)$ в теории n-арных групп определяется тем, что многие известные классы n-арных групп имеют вид $\mathfrak{X}(n)$ для подходящего класса групп $\mathfrak{X}$.

В следующем определении и далее для всякого элемента a n-арной группы $< A, [\,] >$ через @ обозначается (см. [1]) бинарная операция

$$x@y = [x\alpha y],$$

определенная на A с помощью последовательности α – обратной для a.

1. Определение. Если $\mathfrak{X}$ – совокупность групп, то для любого $n \geq 3$ положим

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\,] > \mid \forall a \in A, < A, @ > \in \mathfrak{X}\}.$$

2. Определение. Если $\mathfrak{X}$ – совокупность групп, то для любого $n \geq 3$ положим

$$\mathfrak{X}'(n) = \{< A, [\,] > \mid \exists a \in A, < A, @ > \in \mathfrak{X}\}.$$

Отметим, что совокупность $\mathfrak{X}(n)$ может быть пустой для непустой совокупности $\mathfrak{X}$. Об этом свидетельствует следующий

3. Пример. Пусть $\mathfrak{X}$ состоит из единственной группы A порядка $|A| \geq 2$ и допустим, что $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$. Если $a, b \in A$ $(a \neq b)$, то операции @ и $\textcircled{b}$ не совпадают. Действительно, если допустить совпадение операций @ и $\textcircled{b}$, то $[x\alpha y] = [x\beta y]$ для любых $x, y \in A$, где α и β – обратные последовательности для a и b соответственно. Из последнего равенства следует эквивалентность последовательностей α и β, откуда $a = [a\beta b] = [a\alpha b] = b$, что противоречит условию $a \neq b$. Так как $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$, то $< A, @ > \in \mathfrak{X}$, $< A, \textcircled{b} > \in \mathfrak{X}$, что невозможно, так как совокупность $\mathfrak{X}$ состоит из одной группы. Следовательно, $\mathfrak{X}(n) = \varnothing$.

4. Предложение. Если $\mathfrak{X} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{X}'(n) \neq \varnothing$ и верно включение $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}'(n)$.

Доказательство. Включение $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}'(n)$ очевидно.

Если $< A, * > \in \mathfrak{X}$, то определим производную n-арную операцию

$$[a_1 \ldots a_n] = a_1 * \ldots * a_n.$$

Так как

$$< A, * > = < A, \textcircled{e} > \in \mathfrak{X},$$

где e – единица группы $< A, * >$, то $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}'(n)$, т. е. $\mathfrak{X}'(n) \neq \varnothing$. Предложение доказано.

5. Предложение. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то справедливы следующие утверждения:

$$\mathfrak{X}(n) = \mathfrak{X}'(n)\,; \qquad (5.1)$$

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\,] > \mid < A_0, * > \in \mathfrak{X}\}; \qquad (5.2)$$

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\,] > \mid \exists H \in \mathfrak{X}\}, \qquad (5.3)$$

где $< A_0, * >$ – соответствующая группа Поста, H – соответствующая группа для n-арной группы $< A, [\,] >$.

Доказательство. Ввиду предложения 4 для доказательства равенства (5.1) достаточно доказать включение $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{X}(n)$. Так как для любых $a, b \in A$ группы $< A, @ >$ и $< A, \textcircled{b} >$ изоморфны (следствие 8.2 из [1]), и $\mathfrak{X}$ – класс групп, то действительно верно включение $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{X}(n)$, а значит и равенство (5.1).

По предложению 8.1 из [1], для любого $a \in A$ группа $< A, @ >$ изоморфна соответствующей группе Поста $< A_o, * >$, а согласно утверждению 2) теоремы 6.3 из [1], группа $< A_o, * >$ изоморфна любой соответствующей группе n-арной группы $< A, [\,] >$. Поэтому верны (5.2) и (5.3). Предложение доказано.

Таким образом, на классах групп определения 1 и 2 определяют одну и ту же совокупность n-арных групп. Поэтому согласно предложению 4, непустой класс групп $\mathfrak{X}$ определяет непустую совокупность $\mathfrak{X}(n)$.

6. Лемма. Если τ – гомоморфизм n-арной группы $< A, [\,] >$ на n-арную группу $< B, \lfloor\,\rfloor >$, то τ – гомоморфизм группы $< A, @ >$ на группу $< B, \tau(a) >$. В частности, если τ – изоморфизм $< A, [\,] >$ на $< B, \lfloor\,\rfloor >$, то τ – изоморфизм $< A, @ >$ на $< B, \tau(a) >$.

Доказательство. Легко проверяется, что если $a_1 \ldots a_{n-2}$ – обратная последовательность для a, то $\tau(a_1) \ldots \tau(a_{n-2})$ – обратная последовательность для $\tau(a)$. Поэтому для любых $x, y \in A$ верно

$$\tau(x @ y) = \tau([xa_1 \ldots a_{n-2}y]) =$$

$$= \lfloor \tau(x)\tau(a_1) \ldots \tau(a_{n-2})\tau(y) \rfloor = \tau(x)\, \tau(a)\, \tau(y),$$

т. е. τ – гомоморфизм $< A, @ >$ на $< B, \tau(a) >$. Лемма доказана.

7. Предложение. Для любого класса $\mathfrak{X}$ совокупность $\mathfrak{X}(n)$ также является классом.

Доказательство. Если

$$<A, [\,]> \in \mathfrak{X}(n), \quad <A, [\,]> \simeq < B, \lfloor\,\rfloor >,$$

то, учитывая определение 1 и лемму 6, получаем

$$< A, @ > \in \mathfrak{X}, < A, @ > \simeq < B, b >$$

для любого $a \in A$, где b – образ элемента a при указанном изоморфизме. Так как $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $< B, b > \in \mathfrak{X}$, откуда, учитывая (5.1), получаем $< B, \lfloor\,\rfloor > \in \mathfrak{X}(n)$. Предложение доказано.

Приведем пример, показывающий, что $\mathfrak{X}(n)$ может быть классом n-арных групп, в то время, как $\mathfrak{X}$ классом групп не является, т. е. обратное утверждение к предложению 7 в общем случае неверно.

8. Пример. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп, $< B, \circ >$ – группа, $|B| \geq 2$, $< B, \circ > \notin \mathfrak{X}$. Положим $\mathfrak{X}_B = \mathfrak{X} \bigcup \{< B, \circ >\}$ и пусть $< B, * >$ – группа с операцией

$$x * y = x \circ b \circ y, \quad b \neq e,$$

где e – единица группы $< B, \circ >$. Из изоморфности групп $< B, \circ >$ и $< B, * >$ следует, что $< B, * > \notin \mathfrak{X}$, так как в противном случае $< B, \circ > \in \mathfrak{X}$, что противоречит условию. А так как $< B, * > \notin \mathfrak{X}$, $< B, * > \neq < B, \circ >$, то $< B, * > \notin \mathfrak{X}_B$. Следовательно, $\mathfrak{X}_B$ не является классом групп.

Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$, то $< A, @ > \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_B$ для любого $a \in A$, откуда $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}_B(n)$. Следовательно $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}_B(n)$.

Пусть теперь $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}_B(n)$, т. е. $< A, @ > \in \mathfrak{X}_B$ для любого $a \in A$. Если $< A, b > = < B, \circ >$ для некоторого $b \in A = B$, то для $a \neq b$ из

$$< A, @ > \in \mathfrak{X}_B, < A, @ > \neq < A, b > = < B, \circ >$$

вытекает $< A, @ > \in \mathfrak{X}$. Последнее невозможно, так как в этом случае из изоморфности групп $< A, @ >$ и $< A, b >$ вытекает $< A, b > = < B, \circ > \in \mathfrak{X}$, что противоречит определению $\mathfrak{X}_B$. Таким образом, $< A, @ > \in \mathfrak{X}$ для любого

$a \in A$, откуда $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$, и значит, $\mathfrak{X}_B(n) \subseteq \mathfrak{X}(n)$. Из доказанных включений следует равенство $\mathfrak{X}_B(n) = \mathfrak{X}(n)$.

По предложению 7, $\mathfrak{X}_B(n) = \mathfrak{X}(n)$ – класс n-арных групп, в то время как множество $\mathfrak{X}_B$ не является классом групп.

Приведем примеры, показывающие, что многие известные классы n-арных групп являются классами вида $\mathfrak{X}(n)$ для соответствующих классов групп $\mathfrak{X}$.

9. Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ – класс всех конечных n-арных π-групп. Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{M}$, т. е. порядок $< A, [\,] >$ является π-числом, то тем же π-числом является и порядок группы $< A, @ >$ для любого $a \in A$, т. е. $< A, @ > \in \mathfrak{G}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_\pi(n)$.

Предположим, что существует n-арная группа $< B, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi(n)$, порядок которой не является π-числом. Тогда π-числом не является и порядок группы $< B$, ⓑ $>$ для любого $b \in B$, что невозможно, так как $< B$, ⓑ $> \in \mathfrak{G}_\pi$. Следовательно, $< B, [\,] > \in \mathfrak{M}$, и доказано включение $\mathfrak{G}_\pi(n) \subseteq \mathfrak{M}$, а также равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_\pi(n)$.

Мы показали, что класс всех конечных n-арных π-групп совпадает с классом $\mathfrak{G}_\pi(n)$, где $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех конечных π-групп. В частности класс всех n-арных p-групп совпадает с классом $\mathfrak{N}_p(n)$, где $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп.

10. Пример. Среди всех конечных n-арных групп важное место занимают n-арные группы, порядки которых взаимно просты с n-1. Ясно, что класс всех конечных n-арных групп, порядки которых взаимно просты с n-1, совпадает с классом всех n-арных групп, порядки которых являются π-числами, где $\pi = \Pi \backslash \pi(n-1)$, Π – множество всех простых чисел. Последний класс, в свою очередь, совпадает с классом $\mathfrak{G}_\pi(n)$, где $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех π-групп.

Таким образом, класс всех конечных n-арных групп, порядки которых взаимно просты, с n -1 совпадает с классом $\mathfrak{G}_\pi(n)$, где $\pi = \Pi \backslash \pi(n-1)$.

11. Пример. Пост установил [2, с. 245], что n-арная группа $< A, [\,] >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда её соответствующая группа $< A_0, * >$ – абелева. Поэтому класс всех полуабелевых n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{A}(n)$, где $\mathfrak{A}$ - класс всех абелевых групп.

12. Пример. В [3] установлено, что n-арная группа $< A, [\,] >$ является полуциклической тогда и только тогда, когда для любого $a \in A$ группа $< A, @ >$ – циклическая. Поэтому класс всех полуциклических n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{Z}(n)$, где $\mathfrak{Z}$ – класс всех циклических групп.

Для всякого ли класса $\mathfrak{M}$ n-арных групп существует класс групп $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}(n)$?

13. Пример. Предположим, что последнее равенство верно в случае, когда $\mathfrak{M}$ – класс всех абелевых тернарных групп, и пусть $< Z_3, [\,] >$ тернарная группа, производная от циклической группы $< Z_3 = \{e, a, a^2\}, \circ >$ третьего порядка. Так как $a^{[1]} = e$, $a^{[2]} = a^2$, $a^{[3]} = a$, то тернарная группа $< Z_3, [\,] >$ – циклическая и поэтому $< Z_3, [\,] > \in \mathfrak{M} = \mathfrak{X}(3)$.

Несложно установить совпадение операций $\circ$ и ⓔ, откуда и из $< Z_3, [\,] > \in \mathfrak{X}(3)$ вытекает $< Z_3, \circ > \in \mathfrak{X}$. Так как циклическая группа A_3 третьего порядка является соответствующей для тернарной группы $< B_3, [\,] >$ всех нечётных подстановок на трёх символах (пример 6.12 из [1]), то из $< Z_3, \circ > \in \mathfrak{X}$ вытекает $< B_3, [\,] > \in \mathfrak{X}(3) = \mathfrak{M}$, что невозможно ввиду неабелевости тернарной группы $< B_3, [\,] >$.

Следовательно, класс всех абелевых тернарных групп нельзя представить в виде $\mathfrak{X}(3)$ для некоторого класса групп $\mathfrak{X}$. Таким образом, в общем случае ответ на поставленный выше вопрос отрицательный.

14. Теорема. Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – произвольные совокупности групп, то справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{X}_1(n)\bigcup\mathfrak{X}_2(n) \subseteq (\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)(n)$;

2) $\mathfrak{X}_1'(n)\bigcup \mathfrak{X}_2'(n) = (\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)'(n)$;

3) $\mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n) = (\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2)(n)$;

4) $(\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2)'(n) \subseteq \mathfrak{X}_1'(n) \bigcap \mathfrak{X}_2'(n)$.

Доказательство. 1) Если $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)\bigcup\mathfrak{X}_2(n)$, то либо $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)$, либо $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_2(n)$. Пусть для определённости $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)$. Тогда $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2$ для любого $a \in A$, откуда $\langle A, [\,] \rangle \in (\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)(n)$. Следовательно, верно 1).

2) Включение

$$\mathfrak{X}_1'(n)\bigcup \mathfrak{X}_2'(n) \subseteq (\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)'(n) \qquad (14.1)$$

доказывается аналогично 1), если любой $a \in A$ заменить некоторым $a \in A$.

Если $\langle A, [\,] \rangle \in (\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)'(n)$, то $\exists a \in A$ такой, что $\langle A, @ \rangle \in \in \mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2$, откуда либо $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1$, либо $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_2$. Пусть для определённости $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1$. Тогда

$$\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1'(n) \subseteq \mathfrak{X}_1'(n)\bigcup \mathfrak{X}_2'(n),$$

откуда

$$(\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2)'(n) \subseteq \mathfrak{X}_1'(n)\bigcup \mathfrak{X}_2'(n). \qquad (14.2)$$

Из (14.1) и (14.2) следует 2).

3) Если $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n)$, то $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)$, $\langle A, [\,] \rangle \in \in \mathfrak{X}_2(n)$, т. е. $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1$, $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_2$ для любого $a \in A$, откуда $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2$ для любого $a \in A$. Следовательно, $\langle A, [\,] \rangle \in \in (\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2)(n)$ и верно включение

$$\mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n) \subseteq (\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2)(n). \qquad (14.3)$$

Если теперь $\langle A, [\,] \rangle \in (\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2)(n)$, то $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2$ для любого $a \in A$, т. е. $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_1$, $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}_2$ для любого $a \in A$, откуда $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_1(n)$, $\langle A, [\,] \rangle \in \mathfrak{X}_2(n)$. Следовательно, $\langle A, [\,] \rangle \in \in \mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n)$ и верно включение

$$\mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n) \subseteq \mathfrak{X}_1(n)\bigcap\mathfrak{X}_2(n). \qquad (14.4)$$

Из (14.3) и (14.4) следует 3).

4) Включение 4) доказывается аналогично (14.4), если любой $a \in A$ заменить некоторым $a \in A$. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – классы групп, то $\mathfrak{X}_1\bigcup\mathfrak{X}_2$ и $\mathfrak{X}_1\bigcap\mathfrak{X}_2$ – также классы групп. Тогда по предложению 5,

$$\mathfrak{X}_1(n) = \mathfrak{X}_1'(n), \quad \mathfrak{X}_2(n) = \mathfrak{X}_2'(n),$$

$$(\mathfrak{X}_1 \bigcup \mathfrak{X}_2)(n) = (\mathfrak{X}_1 \bigcup \mathfrak{X}_2)'(n), \quad (\mathfrak{X}_1 \bigcap \mathfrak{X}_2)(n) = (\mathfrak{X}_1 \bigcap \mathfrak{X}_2)'(n).$$

Поэтому из теоремы 14 вытекает

15. Следствие. Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – классы групп, то

$$(\mathfrak{X}_1 \bigcup \mathfrak{X}_2)(n) = \mathfrak{X}_1(n) \bigcup \mathfrak{X}_2(n), \quad (\mathfrak{X}_1 \bigcap \mathfrak{X}_2)(n) = \mathfrak{X}_1(n) \bigcap \mathfrak{X}_2(n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина – Хоссу. – Гомель, 1997. – 85 с.
2. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. -- 1940. – Vol. 48. – N2. – P.208-350.
3. ***Гаврилов В.В.*** Критерий полуцикличности n-арной группы // Междунар. матем. конф.: Тез. докл. – Мн., 1993. – С.10.