УДК 517.955

С.В.ЖЕСТКОВ, И.Н.КРЫЛОВА

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С КОНВЕРГЕНЦИЕЙ

В [1] изложены основы теории линейных нормальных периодических систем в частных производных с конвергенцией. В этой работе она распространяется на линейные периодические системы в частных производных бесконечного порядка.

§1. Постановка задачи

Будем рассматривать линейные периодические системы в частных производных бесконечного порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t)\frac{\partial^j u}{\partial x^j} + f(t,x), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=t_0} = \varphi(x), \qquad t_0 \in R^1, \tag{2}$$

$$G = \{\, t,x:\ t \in R^1,\ \|x\| \le Q \,\},\ Q > 0,$$

где $A(t)$, $C_j(t)$ — непрерывные ω-периодические $(m \times m)$-матрицы, $f(t,x)$ — непрерывный ω-периодический по t m-вектор, причем $f(t,x)$, $\varphi(x)$ являются векторами экспоненциального типа (см. [2]) по x, т.е.

$$\left\|\frac{\partial^j f(t,x)}{\partial x^j}\right\| \equiv \left\|\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_n} f(t,x)}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\ldots\partial x_n^{j_n}}\right\| \le \rho R^j \equiv \rho R_1^{j_1}R_2^{j_2}\ldots R_n^{j_n},$$

$$\left\|\frac{\partial^j \varphi(x)}{\partial x^j}\right\| \le \varphi R^j \equiv \varphi R_1^{j_1}R_2^{j_2}\ldots R_n^{j_n},$$

$$(t,x) \in G,\ |j| \equiv j_1 + j_2 + \cdots + j_n,\ |j| = 0,1,2,\ldots,$$

$R_1 > 0,\ldots,R_n > 0, \rho > 0, \varphi > 0$ — некоторые постоянные, j — мультииндекс с компонентами $j_1, j_2, \ldots j_n$. Здесь под нормой вектора (матрицы) понимаются следующие величины:

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n}|x_i|,\ \|u\| = \max_{1\le l\le m}|u_l|,\ \|A\| = \max_{1\le s\le m}\sum_{l=1}^{m}|a_{sl}|.$$

Отметим, что системы вида (1) изучались в [3] в связи с приложениями к современной математической физике.

Определение 1. Множество векторов $v(t,x) \in R^m$ экспоненциального типа по x и непрерывных по t, определенных в области G, будем называть функциональным пространством векторов экспоненциального типа (ф.п.в.э.т.). Если в нем ввести норму (см.[2])

$$|\|v(t,x)\|| \equiv \sup_{|j|\ge 0}\sup_{G}\left\|\frac{\partial^j v(t,x)}{\partial x^j}\right\| \Big/ R^j,$$

то получим банахово пространство векторов экспоненциального типа (б.п.в.э.т.), которое обозначим $E(G,R)$.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает свойством конвергенции относительно б.п.в.э.т., если

1) для любых $f,\varphi \in E(G,R)$, $f(t+\omega,x) = f(t,x)$, решение $u_{\varphi,f}(t,x)$ задачи (1),(2) определено при $t \ge t_0$ и принадлежит $E(G_{t_0},R)$, где

$$G_{t_0} = \{t,x:\ t \ge t_0,\ \|x\| \le Q\};$$

2) для любой ω-периодической по t вектор-функции $f(t,x) \in E(G,R)$ рассматриваемая периодическая система (1) имеет единственное ω-периодическое по t решение $u_\omega(t,x) \in E(G,R)$;

3) для любого решения $u_{\varphi,f}(t,x)$ ($f,\varphi \in E(G,R)$, $f(t+\omega,x) = f(t,x)$) задачи (1), (2) имеет место соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{|j|\ge 0} \sup_{\|x\|\le Q} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(u_{\varphi,f}(t,x) - u_\omega(t,x) \right) \right\| \Big/ R^j = 0 .$$

Таким образом, $u_\omega(t,x)$ в указанном смысле является предельным режимом системы (1).

Требуется установить достаточные условия, при выполнении которых система (1) будет обладать свойством конвергенции.

§2. Исследование задачи Коши (1),(2)

Изучим задачу (1),(2). Пусть матрица Коши $K(t,t_0)$ линейной системы

$$\frac{dK(t,t_0)}{dt} = A(t)K(t,t_0), \quad K(t_0,t_0) = I ,$$

(I — единичная матрица) удовлетворяет оценке (см.[4])

$$\|K(t,\tau)\| \le K \exp\{-k(t-\tau)\}, \quad t \ge \tau \ge t_0 , \tag{3}$$

с некоторыми положительными константами K, k. Тогда задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению (см.[4])

$$u(t,x) = K(t,t_0)\varphi(x) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) \left\{ \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(\tau) \frac{\partial^j u(\tau,x)}{\partial x^j} + f(\tau,x) \right\} d\tau . \tag{4}$$

В силу условия (3) соответствующее скалярное мажорантное уравнение (см.[1]) примет вид

$$z(t,x) = K\exp\{-k(t-t_0)\} \cdot \varphi \, \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \right\} + \int_{t_0}^{t} K \exp\{-k(t-\tau)\} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{|j|=1}^{+\infty} c_j \frac{\partial^j z(\tau,x)}{\partial x^j} + \rho \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \right\} \right] d\tau , \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$c_j \equiv \max_{t\in[0,\omega]} \|C_j(t)\| .$$

Непосредственным вычислением проверяется, что решение уравнения (4), построенное классическим методом последовательных приближений, мажорируется решением уравнения (5), в котором следует положить $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, и которое также можно построить методом последовательных приближений.

С другой стороны, решение уравнения (5) можно найти в явном виде. Для этого положим

$$z(t,x)=v(t)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right\}$$

и подставим в (5). Тогда относительно неизвестной функции $v(t)$ получим следующее уравнение:

$$v(t)=K\exp\{-k(t-t_0)\}\varphi+\int_{t_0}^{t} K\exp\{-k(t-\tau)\}[Qv(\tau)+\rho]d\tau,$$

$$\left(Q\equiv\sum_{|j|=1}^{+\infty} c_j R^j \equiv \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=1}^{+\infty} c_{j_1 j_2 \cdots j_n} R_1^{j_1}\cdots R_n^{j_n}\right)$$

которое эквивалентно задаче Коши:

$$\frac{dv}{dt}=-kv+K[Qv+\rho],\quad v(t_0)=K\varphi. \tag{6}$$

Решение задачи Коши (6) имеет вид

$$v(t)=(K\varphi)\exp\{-\beta(t-t_0)\}+\frac{\rho K}{\beta}(1-\exp\{-\beta(t-t_0)\}),$$

$$\beta\equiv k-KQ.$$

Следовательно, если предположить, что

$$\beta\equiv k-KQ>0, \tag{7}$$

то решение $u_{\varphi,f}(t,x)$ будет определено при всех $t\ge t_0$, и, кроме того, будет принадлежать пространству $E(G_{t_0},R)$, причем

$$\left\|u_{\varphi,f}(t,x)\right\|\le\sup_{t\ge t_0}\left[(K\varphi)\exp\{-\beta(t-t_0)\}+\frac{\rho K}{\beta}(1-\exp\{-\beta(t-t_0)\})\right]\le$$

$$\le K\varphi+\frac{\rho K}{\beta}. \tag{8}$$

Из оценки (8) вытекает, что решение $u_{\varphi,f}(t,x)$ задачи (1),(2) является единственным. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть при сделанных выше предположениях выполняются неравенства (3), (7) и вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ принадлежат $E(G,R)$. Тогда существует единственное решение задачи (1),(2), принадлежащее $E(G_{t_0},R)$, которое можно построить классическим методом последовательных приближений. При этом для решения имеет место оценка (8).

Установим весьма важное для дальнейшего изложения свойство системы (1). Пусть имеются два решения системы (1) $u_{\varphi_1,f}(t,x)$, $u_{\varphi_2,f}(t,x)$, принадлежащих пространству $E(G,R)$. Рассмотрим их разность

$$v(t,x)\equiv u_{\varphi_2,f}(t,x)-u_{\varphi_1,f}(t,x).$$

Тогда в силу линейности системы (1), получим для любого $t_0\in R^1$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t)v+\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(t)\frac{\partial^j v}{\partial x^j}, \tag{9}$$

$$v\big|_{t=t_0}=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\equiv\psi_{t_0}(x), \tag{10}$$

где $\psi_{t_0}(x)\in E(G,R)$, т.е.

$$\left\|\frac{\partial^j\psi_{t_0}(x)}{\partial x^j}\right\|\le\psi_{t_0}R^j,\ |j|=0,1,2,\ldots,$$

$$(\|x\|\le Q)$$

$\psi_{t_0}>0$ — некоторая постоянная, зависящая от выбора точки t_0.

Как и выше, задача (9),(10) сводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$v(t,x)=K(t,t_0)\psi_{t_0}(x)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\cdot\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(\tau)\frac{\partial^j v(\tau,x)}{\partial x^j}d\tau.$$

Следовательно (см.[1]), соответствующее мажорантное уравнение для него примет вид

$$z(t,x)=K\exp\{-k(t-t_0)\}\cdot\psi_{t_0}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}+\int_{t_0}^{t}K\exp\{-k(t-\tau)\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{|j|=1}^{+\infty}c_j\frac{\partial^j z(\tau,x)}{\partial x^j}d\tau. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) ищем в виде

$$z(t,x)=h(t)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}, \tag{12}$$

где $h(t)$ — неизвестная функция. Подставляя (12) в (11), получим

$$h(t)=K\exp\{-k(t-t_0)\}\psi_{t_0}+\int_{t_0}^{t}K\exp\{-k(t-\tau)\}Qh(\tau)d\tau.$$

Переходя к эквивалентной дифференциальной форме, найдем

$$\frac{dh}{dt}=-kh+KQh=(-k+KQ)h=-\beta\, h, \tag{13}$$

$$h(t_0)=K\psi_{t_0}. \tag{14}$$

Решение задачи (13),(14) имеет вид

$$h(t)=K\psi_{t_0}\exp\{-\beta(t-t_0)\}.$$

Поэтому $z(t,x)=K\psi_{t_0}\exp\{-\beta(t-t_0)\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}$.

По определению мажорантного уравнения можно написать, что

$$\|v(t,x)\|\le z(t,x),\quad \forall(t,x)\in G_{t_0},\quad x_i\ge0,\ i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Предположим, что

$$\beta \equiv k - KQ \equiv k - K \cdot \sum_{|j|=1}^{+\infty} c_j R^j > 0 .$$

Тогда, так как

$$\sup_{t_0 \in R^1} \{\psi_{t_0}\} < +\infty ,$$

то, фиксируя t и переходя к пределу при $t_0 \to -\infty$ в неравенстве (15), получим

$$\|v(t,x)\| \overset{t_0 \to -\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

А это значит, что

$$\|v(t,x)\| \equiv 0 ,$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi_1, f}(t,x) \equiv u_{\varphi_2, f}(t,x).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если система (1) имеет решение, принадлежащее пространству $E(G,R)$, то оно единственно.

§3. Построение ω–периодического решения системы (1)

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t) \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + f(t,x), \quad x \in R^n, \ u \in R^m , \tag{16}$$

$$u(t+\omega, x) = u(t,x), \quad \omega > 0 , \tag{17}$$

где матрицы $A(t)$, $C_j(t)$ являются ω–периодическими по t, а вектор $f(t,x) \in E(G,R)$ и $f(t+\omega, x) = f(t,x)$.

Для ее решения воспользуемся методом, изложенным в [5]. Сведем задачу (16),(17) к эквивалентному интегральному уравнению. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (16),(17). Тогда имеем

$$\int_0^\omega \left\{ A(t)u(t,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t) \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j} + f(t,x) \right\} dt = 0 , \tag{18}$$

$$u(t,x) = u(\tau,x) + \int_\tau^t \left\{ A(s)u(s,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(s) \frac{\partial^j u(s,x)}{\partial x^j} + f(s,x) \right\} ds . \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$\int_0^\omega \left\{ A(t) \left[u(\tau,x) + \int_\tau^t \left\{ A(s)u(s,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(s) \frac{\partial^j u(s,x)}{\partial x^j} + f(s,x) \right\} ds \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t) \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j} + f(t,x) \right\} dt = 0 . \tag{20}$$

Предположим, что

$$\det \widetilde{A}(\omega) \neq 0, \quad \widetilde{A}(\omega) \equiv \int_0^{\omega} A(t)dt .$$

Тогда из (20) найдем

$$u(\tau,x) = -\left[\widetilde{A}(\omega)\right]^{-1} \cdot \int_0^{\omega} \left\{ A(t) \cdot \int_{\tau}^{t} \left\{ A(s)u(s,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(s) \frac{\partial^j u(s,x)}{\partial x^j} + f(s,x) \right\} ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t) \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j} + f(t,x) \right\} dt,$$

или, в других обозначениях,

$$u(t,x) = -\left[\widetilde{A}(\omega)\right]^{-1} \cdot \int_0^{\omega} \left\{ A(\tau) \cdot \int_{t}^{\tau} \left\{ A(s)u(s,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(s) \frac{\partial^j u(s,x)}{\partial x^j} + f(s,x) \right\} ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(\tau) \frac{\partial^j u(\tau,x)}{\partial x^j} + f(\tau,x) \right\} d\tau .$$

Это и есть эквивалентное интегральное уравнение для задачи (16),(17). Искомое ω-периодическое по t решение строится в виде ряда (см.[1])

$$u_\omega(t,x) = \sum_{i=-1}^{+\infty} u_i(t,x),$$

где

$$u_{-1}(t,x) = -\left[\widetilde{A}(\omega)\right]^{-1} \cdot \int_0^{\omega} f(\tau,x)d\tau ,$$

$$u_0(t,x) = -\left[\widetilde{A}(\omega)\right]^{-1} \int_0^{\omega} \left\{ A(\tau) \int_t^{\tau} \{A(s)u_{-1}(s,x) + f(s,x)\} ds + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(\tau) \frac{\partial^j u_{-1}(\tau,x)}{\partial x^j} \right\} d\tau,$$

$$u_{i+1}(t,x) = -\left[\widetilde{A}(\omega)\right]^{-1} \cdot \int_0^{\omega} \left\{ A(\tau) \cdot \int_t^{\tau} \left\{ A(s)u_i(s,x) + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(s) \frac{\partial^j u_{i-1}(s,x)}{\partial x^j} \right\} ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(\tau) \frac{\partial^j u_i(\tau,x)}{\partial x^j} \right\} d\tau, \quad i = 0,1,2,\ldots .$$

Отметим, что каждый член $u_i(t,x)$ этого ряда ω-периодичен по t в силу своего построения. Оценивая соответствующие производные, получим

$$\left\|u_{-1}(t,x)\right\| \leq \gamma\rho\omega \equiv \mu_{-1},$$

$$\left\|u_0(t,x)\right\| \leq \gamma\left[\alpha(\alpha\mu_{-1} + \rho)\frac{\omega^2}{2} + \omega Q\mu_{-1} \right] \equiv \mu_0,$$

$$\left\|u_{i+1}(t,x)\right\| \leq \gamma\left[\alpha(\alpha\mu_i + Q\mu_{i-1})\frac{\omega^2}{2} + \omega Q\mu_i \right] \equiv \mu_{i+1},$$

$$i = 0,1,2,\ldots,$$

где

$$\gamma \equiv \left\| \left[\tilde{A}(\omega)\right]^{-1} \right\|, \quad \alpha \equiv \max_{0\le t\le\omega} \|A(t)\|, \quad c_j \equiv \max_{0\le t\le\omega} \|C_j(t)\|, \quad Q \equiv \sum_{|j|=1}^{+\infty} c_j R^j .$$

Очевидно, что при выполнении неравенства

$$q \equiv \gamma \left[\alpha(\alpha + Q)\frac{\omega^2}{2} + \omega Q \right] < 1 \tag{21}$$

будем иметь

$$\|u_\omega(t,x)\| \le \frac{\gamma\rho\omega + \gamma\alpha\rho\dfrac{\omega^2}{2}}{1-q},$$

и, значит, $u_\omega(t,x) \in E(G,R)$. По теореме 2 это решение единственно.

Теорема 3. Пусть $\det \tilde{A}(\omega) \ne 0$ и пусть выполнено условие (21). Тогда задача (16),(17) имеет единственное ω–периодическое решение из пространства $E(G,R)$.

§4. О достаточных условиях, обеспечивающих свойство конвергентности для системы (1)

Согласно определению требуется установить, когда выполняется соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{|j|\ge 0} \sup_{\|x\|\le Q} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(u_{\varphi,f}(t,x) - u_\omega(t,x)\right) \right\| \Big/ R^j = 0,$$

где $u_{\varphi,f}(t,x)$ — решение задачи (1),(2) из пространства $E(G_{t_0},R)$, которое существует в силу теоремы 1, $u_\omega(t,x)$ — решение задачи (16),(17), которое существует в силу теоремы 3.

Для этого рассмотрим разность

$$u_{\varphi,f}(t,x) - u_\omega(t,x) \equiv H(t,x).$$

В силу линейности системы (1) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = A(t)H + \sum_{|j|=1}^{+\infty} C_j(t) \frac{\partial^j H}{\partial x^j},$$

и, кроме того,

$$H(t,x)\big|_{t=t_0} \equiv \left(u_{\varphi,f}(t,x) - u_\omega(t,x) \right)\big|_{t=t_0} = \varphi(x) - u_\omega(t,x)\big|_{t=t_0} \equiv \gamma_{t_0}(x),$$

где $\gamma_{t_0}(x) \in E(G,R)$, причем

$$\|\gamma_{t_0}(x)\| = \gamma_{t_0},$$

$\gamma_{t_0} > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от точки t_0.

Составим задачу Коши для вектор-функции $H(t,x)$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=A(t)H+\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(t)\frac{\partial^j H}{\partial x^j},$$

$$H\big|_{t=t_0}\equiv\gamma_{t_0}(x),$$

которая эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$H(t,x)=K(t,t_0)\gamma_{t_0}(x)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\cdot\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(\tau)\frac{\partial^j H(\tau,x)}{\partial x^j}d\tau. \qquad (22)$$

Соответствующее мажорантное уравнение для (22) примет вид

$$z(t,x)=K\exp\{-k(t-t_0)\}\gamma_{t_0}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}+\int_{t_0}^{t}K\exp\{-k(t-\tau)\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{|j|=1}^{+\infty}c_j\frac{\partial^j z(\tau,x)}{\partial x^j}d\tau,\quad x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,n}.$$

Решая его, найдем

$$z(t,x)=K\gamma_{t_0}\exp\{-\beta(t-t_0)\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial^j H(t,x)}{\partial x^j}\right\|\le K\gamma_{t_0}\exp\{-\beta(t-t_0)\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}R_ix_i\right\}\cdot R^j,$$

и, поэтому,

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{|j|\ge 0}\sup_{\|x\|\le Q}\left\|\frac{\partial^j H(t,x)}{\partial x^j}\right\|\Big/R^j=0,$$

в силу неравенства (7).

Теорема 4. Пусть $\det\tilde{A}(\omega)\ne 0$ и выполнены условия (7),(21). Тогда система (1) обладает свойством конвергенции в указанном выше смысле.

Полученные результаты обобщают теорию линейных систем с конвергенцией, изложенную в книге [4].

§5. Применение развитой теории к линейным системам с постоянной матрицей A

Для иллюстрации развитой выше теории рассмотрим линейную систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au+\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(t)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}+f(t,x),\quad x\in R^n,\quad u\in R^m, \qquad (23)$$

где A — постоянная $(m\times m)$–матрица, все характеристические корни $\lambda_i(A)$ которой имеют отрицательные действительные части,

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A)<0,\quad i=\overline{1,m}, \qquad (24)$$

$C_j(t)$ — непрерывные ω-периодические $(m\times m)$-матрицы, $f(t,x)$ — непрерывный ω-периодический по t m-вектор из пространства $E(G,R)$.

В этом случае матрица Коши $K(t,t_0)$ выписывается в явном виде

$$K(t,t_0)=\exp\{A(t-t_0)\}.$$

В силу условия (24) она удовлетворяет требуемому неравенству

$$\|K(t,\tau)\|\le K\exp\{-k(t-\tau)\},\quad t\ge\tau,$$

с положительными постоянными K,k. Поэтому при выполнении условия (7) теоремы 1,2 будут справедливыми.

Для построения ω-периодического по t решения системы (23) следует решить эквивалентное интегральное уравнение

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{t}\exp\{A(t-\tau)\}\left[\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(\tau)\frac{\partial^j u(\tau,x)}{\partial x^j}+f(\tau,x)\right]d\tau. \qquad (25)$$

В силу условия (24) решение уравнения (25) строится классическим методом последовательных приближений:

$$u_0(t,x)=\int_{-\infty}^{t}\exp\{A(t-\tau)\}f(\tau,x)d\tau,$$

$$u_{i+1}(t,x)=\int_{-\infty}^{t}\exp\{A(t-\tau)\}\left[\sum_{|j|=1}^{+\infty}C_j(\tau)\frac{\partial^j u_i(\tau,x)}{\partial x^j}+f(\tau,x)\right]d\tau,$$

$$i=0,1,2,\ldots.$$

При этом все последовательные приближения $u_i(t,x)$, $i=0,1,2,\ldots$, оказываются ω-периодическими по t вектор-функциями, так как известно (см.[4]), что оператор

$$\int_{-\infty}^{t}\exp\{A(t-\tau)\}d\tau$$

переводит множество непрерывных ω-периодических по t функций в себя. Следовательно,

$$u_\omega(t,x)=u_0(t,x)+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(u_{i+1}(t,x)-u_i(t,x)\right). \qquad (26)$$

Для ряда (26) составим соответствующий мажорантный ряд. Имеем

$$\|u_0(t,x)\|\le\frac{K}{k}\rho\equiv\mu_0,$$

$$\|u_{i+1}(t,x)-u_i(t,x)\|\le\sup_t\int_{-\infty}^{t}K\exp\{-k(t-\tau)\}[Q\mu_i]d\tau=\frac{KQ}{k}\mu_i\equiv\mu_{i+1},$$

$$i=0,1,2,\ldots.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{KQ}{k}<1\quad\text{или}\quad k-KQ>0, \qquad (27)$$

мажорантный ряд сходится. При этом построенное решение

$$u_\omega(t,x) \in E(G,R).$$

Далее повторяя предыдущие рассуждения, устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (24),(27). Тогда система (23) обладает свойством конвергенции в указанном смысле.

Полученный результат обобщает теорию линейных систем с конвергенцией, изложенную в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Жестков С.В.*** О свойстве конвергенции для линейных нормальных периодических систем в частных производных // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т.30. – №5. – С.902–904.
2. ***Радыно Я.В.*** Векторы экспоненциального типа и функциональное исчисление // Докл. АН БССР. – 1983. – Т.27. – №10. – С.875–878.
3. ***Дубинский Ю.А.*** Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи мат. наук. – 1982. – Т.37. – №5. – С.97–159.
4. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.
5. **Жестков С.В.** Некоторые конструктивные методы построения периодических решений линейных дифференциальных систем в частных производных: Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Мн., 1984.